22-03-2021 (14-16)
PARTI AGGIUNTE RISPETTO AL 2020

LEZ 10

ECCO GLI ESEMPI FATTI A LEZIONE CHE SONO **ESSENZIALMENTE** DIVERSI DA QUELLI DEL 2020.

ES. 1 STUDIARE IL CARATTERE DI $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\ln(1+e^t)}\, dt$.

SU $[0,1]$ LA FUNZIONE INTEGRANDA È CONTINUA QUINDI IL CARATTERE È LO STESSO DI:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\ln(1+e^x)}\, dx$$

POSTO

$$m = \mathrm{INF}\{\sin^4 x + \cos^4 x \mid 0 \leq x \leq 2\pi\}$$

SI OTTIENE $m > 0$ GRAZIE AL T. DI WEIERSTRASS.
INOLTRE, PER LA PERIODICITÀ DI $\sin^4 x + \cos^4 x$ SI HA

$$(1) \qquad \sin^4 x + \cos^4 x \geq m \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

INOLTRE $\forall x \geq 1$ SI HA:

$$(2) \qquad \ln(1+e^x) < \ln(e^x + e^x) = \ln(2e^x) = \ln 2 + x < 2x$$

DI CONSEGUENZA

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\ln(1+e^x)} \overset{(1)}{>} \frac{m}{\ln(1+e^x)} \overset{(2)}{>} \frac{m}{2x} = \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

QUINDI, VISTO CHE $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ DIVERGE, ANCHE $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\ln(1+e^x)}\, dx$ DIVERGE, PER IL CRIT. DEL CONFRONTO.

ES. 2 STUDIARE IL CARATTERE DI $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x}}{1+x^2}\, dx$.

IL CARATTERE È LO STESSO DI:

$$(3) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{e^{\cos x}}{1+x^2}\, dx$$

SU $[1,+\infty)$ SI HA:

$$\frac{e^{\cos x}}{1+x^2} \leq \frac{e}{1+x^2} < \frac{e}{x^2} = e \cdot \frac{1}{x^2}$$

BASTA QUINDI RICORDARE CHE

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \text{ CONVERGE}$$

E APPLICARE IL CRIT. DEL CONFRONTO PER OTTENERE CHE ANCHE (3) CONVERGE.

ES. 3 STUDIARE IL CARATTERE DI $\int_{\frac{1}{100}}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2+\sin x}\right) dx$.

IL CARATTERE È LO STESSO DI:

$$(4) \qquad \int_2^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2+\sin x}\right) dx$$

MA L'ULTIMO INTEGRALE HA IL VANTAGGIO CHE L'INTEGRANDA È POSITIVA, QUINDI SI PUÒ APPLICARE IL CRIT. DEL CONFRONTO ASINTOTICO. INFATTI PER $x \to +\infty$ SI HA:

$$\sin\left(\frac{1}{x^2+\sin x}\right) \simeq \frac{1}{x^2+\sin x} \simeq \frac{1}{x^2}$$

MA, SICCOME $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ CONVERGE, ANCHE (4) CONVERGE.