19-04-2021 (14:00-16:00) — LEZ 24

PRENDENDO SPUNTO DAGLI ESERCIZI SVOLTI SONO STATE INTRODOTTE LE NOZIONI DI TEORIA RIPORTATE DI SEGUITO.

TEO.1 (CRIT. DI CONDENSAZIONE)

SIA (a_n) UNA SUCCESSIONE POSITIVA E DECRESCENTE, ALLORA

$$\sum a_n \quad E \quad \sum 2^k a_{2^k}$$

HANNO LO STESSO CARATTERE.

DIMO

SIANO

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

E

$$\mathcal{S}_k = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^k a_{2^k}$$

I PASSO $\mathcal{S}_k \to L$ FINITO $\Rightarrow S_n \to \ell$ FINITO.

INFATTI $\forall k \in \mathbb{N}$ SI HA:

$$S_{2^{k+1}-1} = a_0 + a_1 + \underbrace{a_2 + a_3}_{\le \boxed{2a_2}} + \underbrace{a_4 + a_5 + a_6 + a_7}_{\le \boxed{4a_4}} + \dots + \underbrace{a_{2^k} + \dots + a_{2^{k+1}-1}}_{\le \boxed{2^k a_{2^k}}} \le \tag{1}$$

PERCHÈ a_n È DECRESCENTE

$$\le a_0 + a_1 + \boxed{2a_2} + \boxed{4a_4} + \dots + \boxed{2^k a_{2^k}} =$$

$$= a_0 + \mathcal{S}_k$$

SICCOME SAPPIAMO GIÀ CHE $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ESISTE, PERCHÈ S_n È CRESCENTE,

LA (1) BASTA A GARANTIRCI CHE È FINITO.

$\boxed{\text{II PASSO}}$ $\sigma_k \to +\infty \Rightarrow S_n \to +\infty$

SI RAGIONA COME PRIMA, DOPO AVER OSSERVATO CHE:

$$S_{2^k} = a_0 + a_1 + a_2 + \underbrace{a_3 + a_4}_{} + \underbrace{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}_{} + \dots + \underbrace{a_{2^{k-1}+1} + \dots + a_{2^k}}_{} \geq$$

$$\geq a_0 + a_1 + a_2 + \boxed{2a_4} + \boxed{4a_8} + \dots + \boxed{2^{k-1}a_{2^k}} \geq$$

$$\geq a_0 + \frac{1}{2}\left(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots + 2^k a_{2^k}\right) = a_0 + \frac{1}{2}\sigma_k$$