www.problemisvolti.it

Analisi Matematica 1

lezioni on-line

Teorema degli Zeri e dei Valori Intermedi

TEOREMA DATA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA E TALE CHE $f(a)<0$ E $f(b)>0$ (OPPURE $f(a)>0$ E $f(b)<0$).
ALLORA ESISTE $c\in(a,b)$ TALE CHE $f(c)=0$.

DIMOSTRAZIONE $I_0=[a_0,b_0]=[a,b]$

$\downarrow$

$I_1=[a_1,b_1]$ — $I_1\subset I_0$ $\quad b_1-a_1=\frac{b-a}{2}$; valgono stesse ipotesi per f

$\downarrow$

$I_2=[a_2,b_2]$ — $I_2\subset I_1$ $\quad b_2-a_2=\frac{b-a}{2^2}$; valgono stesse proprietà per f

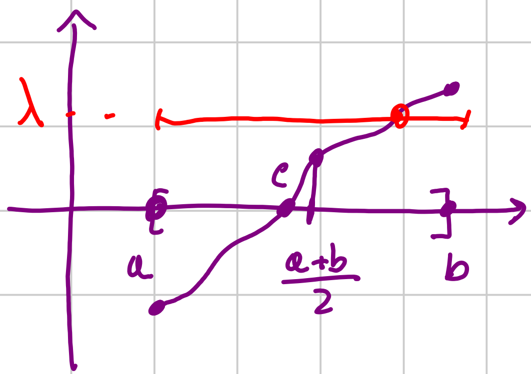
$\downarrow$

$\vdots$

$I_n=[a_n,b_n]$ — $I_n\subset I_{n-1}$ $\quad b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$; f ha stesse ipotesi

$\downarrow$

$\vdots$



① $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$ $\quad a_1=a$, $\quad b_1=\frac{a+b}{2}$

② $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ $\quad a_1=\frac{a+b}{2}$, $\quad b_1=b$

(a_n) limitata, crescente; $a_n\to\ell_1\in I$

(b_n) limitata, decrescente; $b_n\to\ell_2\in I$

$b_n-a_n\to\ell_2-\ell_1$

$\frac{b-a}{2^n}\to 0$ $\Rightarrow \ell_2=\ell_1=c$

$f(a_n)\to f(c)$
$f(b_n)\to f(c)$
$f(a_n)<0$
$f(b_n)>0$
$\Rightarrow f(c)=0$

COROLLARIO 1 [T. VAL. INTERMEDI]

DATA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA, PER OGNI λ STRETTAMENTE COMPRESO TRA $f(a)$ E $f(b)$ ESISTE $c\in(a,b)$ TALE CHE $f(c)=\lambda$

COROLLARIO 2

SIA $I\subset\mathbb{R}$ UN INTERVALLO ED $f:I\to\mathbb{R}$ CONTINUA. ALLORA ANCHE $f(I)$ È UN INTERVALLO.