Stage/Campionato Urbi et Orbi

Combinatoria Zero

8 Novembre 2019

Soluzioni scritte da **Luca Vantaggio, L.S.S. "Giuseppe Battaglini", TARANTO**.

Potrai trovare tutto il materiale didattico dello stage **(lezioni,testi,gare,risultati)** linkato alla pagina

http://www.problemisvolti.it/ZStageMateriale.html

Invece, potrai trovare l'elenco delle squadre iscritte al campionato *Stage Urbi et Orbi* linkato alla pagina:

http://www.problemisvolti.it/StageOlimpiadiMatematica.html

Nota: da ora in poi la soluzione di ogni esercizio sarà denotata con s.

Esercizio 1. Quanti sono gli anagrammi della parola **AIUOLE** che iniziano per vocale?

Considerando che tutte le lettere di AIUOLE sono distinte, allora $s = 5 \cdot 5! = 600$, giacché la prima lettera di ogni anagramma può essere scelta in 5 modi e le restanti lettere si possono permutare in 5! modi.
600

Esercizio 2. Quanti sono gli anagrammi della parola **ATTRATTA** che iniziano e finiscono con la stessa lettera?

Distinguiamo due casi:

1. la prima e l'ultima lettera dell'anagramma sono delle T: le lettere rimaste sono complessivamente una R, due T e tre A, che danno luogo a $\frac{6!}{1! \cdot 2! \cdot 3!} = 60$ anagrammi;
2. la prima e l'ultima lettera dell'anagramma sono delle A: le lettere rimaste sono complessivamente una R, una A e quattro T, che danno luogo a $\frac{6!}{1! \cdot 1! \cdot 4!} = 30$ anagrammi.

Perciò $s = 60 + 30 = 90$.
90

Esercizio 3. Al lunedì a scuola ho 6 materie tutte diverse e posso giustificarmi solo in 2. In quanti modi posso scegliere le 4 materie da studiare?

Poiché le materie sono 6, da cui ne sto scegliendo 4 senza vincoli, si ha che $s = \binom{6}{4} = 15$.
15

Esercizio 4. Cancellando 3 cifre a caso dal numero **123456789** ottengo sempre un numero di 6 cifre. Quanti diversi numeri di 6 cifre posso ottenere in questo modo?

Poiché le cifre del numero sono distinte, allora $s = \binom{9}{6} = 84$, visto che i numeri che si possono ottenere sono tanti quanti i sottoinsiemi di taglia 6 su $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
84

Esercizio 5. Quanti termini può avere, al massimo, un polinomio omogeneo di secondo grado, di 10 variabili, ridotto ai minimi termini?

Chiaramente s conta il numero di modi di distribuire 2 caramelle a 10 bambini, ovvero $s = \binom{2+9}{2} = 55$.
55

Esercizio 6. Un grillo salta tra i punti a coordinate intere del piano cartesiano facendo solo salti di lunghezza 1. Parte dal punto $(-4, -3)$ e arriva nel punto $(3, 4)$ facendo una sequenza di 14 salti. Quante sono le diverse sequenze di salti che lo fanno passare per il punto $(0, 0)$?

Partiamo con il presupposto che, giacché il grillo deve eseguire minimo 7 spostamenti in orizzontale (verso destra) e 7 spostamenti in verticale (verso l'alto), ed ha a disposizione $14 = 7 + 7$ salti, ad ogni mossa non ha altre alternative se non spostarsi in alto o a destra. Perciò $s = \binom{7}{4}^2 = 1225$ modi, giacché può raggiungere il punto $(0, 0)$ partendo da $(-4, -3)$ in $\binom{7}{4}$ modi e similmente da $(0, 0)$ può raggiungere il punto $(3, 4)$ in $\binom{7}{4}$ modi.
1225

Esercizio 7. Un papà distribuisce 17 caramelle uguali alle sue 5 figlie, in modo che ciascuna ne abbia almeno 2. In quanti modi lo può fare?

Chiaramente $s = \binom{11}{7} = 330$, giacché in effetti il numero di distribuzioni richieste è in bigezione con il numero di distribuzioni di 7 caramelle a 5 bambini senza ulteriori vincoli.
330

Esercizio 8. Trovare il coefficiente di x^3y^4 nello sviluppo di $(x + y + \frac{1}{2})^{10}$.

Una conseguenza banale della distributività del $\cdot$ rispetto alla $+$ (assieme alla associatività e commutatività della $+$) è che 2^3s conta il numero di maniere in cui posso dividere 10 elementi in tre scatole, mettendone 4 nella prima e 3 nelle altre due, Perciò $s = \frac{1}{8}\binom{10}{4\ 3\ 3} = 525$.
525

Esercizio 9. Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dire quante sono le funzioni $f : A \to B$ che sono sia **debolmente crescenti** che **suriettive**.

Chiaramente s conta il numero di combinazioni con ripetizione di $1, 2, 3, 4, 5$ in classe 9 in cui compaiono almeno una volta ognuno. Perciò s conta il numero di modi in cui si possono distribuire 4 caramelle a 4 bambini, ovvero $s = \binom{8}{4} = 70$.
70

Esercizio 10. Sette fratelli vanno al cinema e trovano una fila di 7 posti consecutivi su cui sedersi. Però vogliono distribuirsi sui 7 posti in modo che i 3 fratelli più piccoli siano sempre staccati, per evitare che si mettano a parlare. In quanti modi diversi possono farlo?

Ragionando come in NEOZOICO, $s = 3! \cdot 4! \cdot \binom{5}{3} = 1440$, in quanto contiamo prima gli anagrammi di $GGGGPPP$ (dove G sta per *Grande* e P sta per *Piccolo*) che definiscono dei posizionamenti dei grandi e dei piccoli che siano validi, e sono $\binom{5}{3}$, e poi distribuiamo i fratelli, e lo possiamo fare in $3! \cdot 4!$ modi.
1440

Esercizio 11. Nelle parole **numeriRUMENI** e **ruminIMUReNE** ogni minuscola precede la corrispondente maiuscola. Sia N il numero dei loro anagrammi con la stessa proprietà. Trovare le ultime 4 cifre di N.

Numeriamo da 1 a 12 le posizioni che le lettere possono assumere nel nostro anagramma. Chiamiamo inversione una trasformazione che inverte la posizione di una lettera minuscola con la maiuscola corrispondente. Diciamo che due anagrammi sono equivalenti secondo $\sim$ se esiste un'opportuna composizione di inversioni che applicate ad una restituiscono l'altra. E' facile verificare che $\sim$ è una relazione di equivalenza su A (insieme degli anagrammi). Ebbene, è alquanto facile verificare che $s = |A/\sim|$, ed è altrettanto facile rendersi conto che ogni classe di equivalenza avrà $2^6 = 64$ elementi, ovvero $s = 12!/64 \equiv 4400 \mod 10000$.
4400

Esercizio 12. Nella parola **SPASSOSE** compare la sequenza **SS**, cioè almeno due **S** sono appiccicate fra loro. Quanti sono i suoi anagrammi con la stessa proprietà?

Detto X il numero di anagrammi in cui non ci sono due S vicine, abbiamo evidentemente che $s = \frac{8!}{4!} - X$. D'altro canto, ragionando come in NEOZOICO, abbiamo che $X = \binom{5}{4} \cdot 4! = 5!$ e quindi $s = 1560$.
1560

Esercizio 13. Quante sono le funzioni $f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,\ldots,15\}$ tali che per ogni $n, m \in \{1,2,3,4\}$, con $n \neq m$, si ha $|f(n) - f(m)| \geq 3$?

Chiaramente s conta il numero di modi di scegliere una quaterna ordinata (a_1, a_2, a_3, a_4) di numeri in $\{1,2,3,\ldots,15\}$ per cui $i \neq j$ implica $|a_i - a_j| \geq 3$, che per quanto visto a lezione si può fare in $s = 4! \cdot \binom{9}{5} = 3024$. Ricordiamo brevemente le tecniche esposte a lezione: vogliamo innanzitutto contare i sottoinsiemi D di taglia 4 dell'insieme $\{1,2,3,\ldots,15\}$ per cui il valore assoluto della differenza di due elementi distinti di D sia maggiore o uguale di 3. Detti $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ gli elementi di un D qualunque, possiamo ragionare in due maniere:

- possiamo individuare la quaterna (a_1, a_2, a_3, a_4) con la cinquina $(a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, 15 - a_4)$, e quindi notare che stiamo distribuendo 15 caramelle a 5 bambini facendo sì che il primo ne abbia almeno una e il secondo, il terzo e il quarto ne abbiamo almeno tre, e lo possiamo fare in $\binom{9}{5}$ modi;

- possiamo individuare la quaterna (a_1, a_2, a_3, a_4) con la quaterna $(a_1, a_2-2, a_3-4, a_4-6)$, che può essere costruita semplicemente scegliendo un sottoinsieme di 4 elementi dall'insieme $\{1,2,\ldots,9\}$, e si può fare in $\binom{9}{4}$ modi.

Concludiamo ordinando gli elementi di D, e si può fare in 4! modi.
3024

Esercizio 14. Cancellando due lettere a caso dalla parola **ABABABCCABABAB** ottengo sempre una parola di 12 lettere. Quante parole diverse di 12 lettere posso ottenere in questo modo?

Notiamo innanzitutto che gli unici casi in cui una parola si può ottenere con più di una cancellazione sono i seguenti:

- viene cancellata una C: cancellando al posto suo l'altra C si ottiene la stessa parola;

- cancellando una A e una B contigue: cancellando un'altra A e un'altra B contigue dello stesso blocco ABABAB si ottiene la stessa parola.

Quindi $s = \binom{14}{2} - 12 - 8 = 71$.
71

Esercizio 15. Trovare il coefficiente di $x^{14}y^{14}z^7w^{10}$ nello sviluppo di $(xyz + xyw + \frac{xzw}{9} + \frac{yzw}{10})^{15}$, dopo aver sommato tra loro i termini simili.

Innanzitutto ci chiediamo quanti e quali sono i possibili a_1, a_2, a_3, a_4 naturali per cui $(xyz)^{a_1}(xyw)^{a_2}(xzw)^{a_3}(yzw)^{a_4}$ è identicamente $x^{14}y^{14}z^7w^{10}$.

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 14 \\ a_1 + a_2 + a_4 = 14 \\ a_1 + a_3 + a_4 = 7 \\ a_2 + a_3 + a_4 = 10 \end{cases}$$

e quindi $a_1 = 5$, $a_2 = 8$, $a_3 = a_4 = 1$. Di conseguenza $s = \frac{1}{90} \cdot \binom{15}{5\ 8\ 1\ 1} = 3003$.
3003

Esercizio 16. Calcolare la somma algebrica dei coefficienti di tutti i termini di 5° grado nello sviluppo di $(x + y + z + w + \frac{1}{2} - v - \frac{1}{6})^9$.

$s = \binom{9}{5}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)^4 \cdot 3^5 = 378$. Difatti scritto $(x+y+z+w+\frac{1}{2}-v-\frac{1}{6})^9 = (x+y+z+w+\frac{1}{2}-v-\frac{1}{6})\cdot(x+y+z+w+\frac{1}{2}-v-\frac{1}{6})\cdot \ \ldots \ \cdot(x+y+z+w+\frac{1}{2}-v-\frac{1}{6})$ si ottiene che i fattori che contribuiranno ad una parte letterale di 5° grado si possono scegliere in $\binom{9}{5}$, mentre la somma dei coefficienti di tutti i monomi di 5° grado che deriveranno dai cinque fattori scelti è pari alla somma dei coefficienti di $(x+y+z+w-v)^5$, cioè 3^5, moltiplicata per $(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})^4$.
378

Esercizio 17. La parola **NINNANANNA** ha la seguente proprietà: comunque la si tagli in due pezzi, nel primo pezzo (quello di sinistra) le lettere **N** sono almeno la metà. Quanti sono i suoi anagrammi che hanno la stessa proprietà?

Consideriamo prima di tutto indistinguibili tutte le lettere diverse da N. E' facile notare che quindi $s_{indistinguibili}$ conta il numero di percorsi di una pulce che, partendo da $(0,0)$, deve raggiungere il punto $(6,4)$ senza mai superare la diagonale $y = x$. Con metodi bigettivi si può mostrare che $s_{indistinguibili} = \binom{10}{4} - \binom{10}{3} = 90$, in quanto tutti i percorsi che superano la diagonale sono in bigezione con i percorsi che partono da $(0,0)$ e giungono in $(3,7)$. In particolare l'idea è la seguente: preso un percorso che supera la diagonale, scelto il punto in cui la pulce ha appena superato per la prima volta la diagonale in questione, si tramutino i successivi spostamenti a destra in spostamenti in alto e vicerversa. Quello che si ottiene con questa operazione è un percorso che raggiunge sempre la casella $(3,7)$. Siccome da un percorso siffatto si può sempre anche ricavare un percorso che supera la diagonale (è sufficiente invertire il procedimento), la bigezione è dimostrata (per curiosità: vedere *Teorema di Cantor-Bernstein*). Poiché le lettere $IAAA$ possono essere ordinate in 4 modi, abbiamo che $s = 4 \cdot 90 = 360$.
360

Esercizio 18. In quanti modi posso scegliere due divisori distinti di 54000 (contando tra i divisori 1 e 54000) in modo che uno dei due divida l'altro?

Poiché $54000 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ abbiamo che chiaramente $s = \binom{6}{2}\binom{5}{2}^2 - 5\cdot 4\cdot 4 = 1420$, ghiacché s conta le terne di funzioni debolmente crescenti $(f_1 : \{1,2\} \to \{0,1,2,3,4\}, f_2 : \{1,2\} \to \{0,1,2,3\}, f_3 : \{1,2\} \to \{0,1,2,3\})$ con $(f_1(1), f_2(1), f_3(1)) \neq (f_1(2), f_2(2), f_3(2))$.
1420

Esercizio 19. Quanti sono i numeri di 8 cifre, tutte diverse, che sono divisibili per 18? Dare come risposta il risultato trovato, privato di eventuali zeri finali.

Chiaramente la condizione necessaria e sufficiente affinché un numero naturale n sia divisibile per 18 è che sia contemporaneamente divisibile per 2 e per 9, ovvero se e solo se l'ultima sua cifra è pari e la somma delle sue cifre è divisibile per 9. Poiché $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9 \equiv 0 \mod 9$, la somma delle due cifre mancanti in uno qualsiasi dei numeri di 8 cifre cercati deve essere 9, per cui uno è pari e l'altro è dispari. Distinguiamo 2 casi:

1. mancano 0 e 9. Ci sono esattamente $4 \cdot 7!$ numeri di questo tipo;

2. non manca lo 0. Ci sono esattamente $4 \cdot (4 \cdot 7! - 3 \cdot 6!)$ numeri di questo tipo (abbiamo tolto i casi in cui lo 0 compariva come prima cifra).

Perciò $s = 4 \cdot 7! + 4 \cdot (4 \cdot 7! - 3 \cdot 6!) = 92160$.
9216

Esercizio 20. Dato $I = \{1,2,3,\ldots,100\}$ diremo che una terna ordinata (A,B,C) di sottoinsiemi I è **buona** se $A \cup B \cup C = I$, $A \cap B \cap C = \emptyset$ e le intersezioni a due a due di A, B e C sono composte ciascuno da due elementi. Quante sono le terne **buone**?

Chiaramente $s = \binom{100}{2\ 2\ 2\ 94} \cdot 3^{94}$, in quanto è possibile scegliere gli elementi da mettere nelle intersezioni in $\binom{100}{2\ 2\ 2\ 94}$ modi, mentre 3^{94} conta le maniere di spartire i restanti elementi tra i 3 insiemi. Con qualche base sulle congruenze e, volendo, anche il teorema cinese del resto si dimostra facilmente che $s \equiv 4000 \mod 10000$.
4000

Esercizio 21. Detto $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, dire quante sono le funzioni $f : A \to A$ tali che per ogni $n \in A$ si ha che $f(n) \neq n$ ma $f(f(f(f(f(f(n)))))) = f(n)$.

Supponiamo che per un qualche n in A si abbia che $f^x(n) = f(n)$ con $2 \leq x \leq 5$. Allora $f^x(n) = f(n) = f^{7-x}(n)$. A questo punto analizziamo caso per caso cosa succede:

1. se $x = 2$ allora $f^2(n) = f(n)$, contrariamente all'ipotesi per cui per ogni j in A si deve avere che $f(j) \neq j$. Similmente per $x = 5$;

2. se $x = 3$ allora $f^4(n) = f^3(n)$, contrariamente alle ipotesi. Similmente per $x = 4$.

Quindi per ogni valore n in A si deve avere che 6 è il minimo intero positivo x diverso da 1 per cui $f^x(n) = f(n)$. A questo punto non è difficile notare che la funzione è formata da un $5 - \textit{ciclo}$ e un elemento "isolato" che ha per immagine un elemento del $5 - \textit{ciclo}$ (condizione necessaria e sufficiente).
Notando che le funzioni così fatte sono individuate da una permutazione degli elementi di A dove il primo elemento è quello isolato, il secondo è la sua immagine e tutti gli elementi dal secondo al sesto definiscono il $5 - \textit{ciclo}$ della funzione, abbiamo che $s = 6! = 720$.
720

Esercizio 22. Una pulce salta tra le caselle di una scacchiera 6×6 in modo che, ad ogni salto, la casella di partenza e quella di arrivo hanno esattamente un lato in comune. Se parte dalla casella in basso a sinistra, con quante diverse sequenze di 14 salti può arrivare alla casella in alto a destra?

Notiamo che la pulce deve fare sicuramente 5 passi a destra e 5 passi in alto, mentre la risultante degli altri 4 passi deve essere il vettore nullo. Distinguiamo perciò tre casi:

- i quattro passi aggiuntivi sono due spostamenti a destra e due a sinistra. Se rappresentiamo il percorso scelto come una sequenza di 14 frecce di cui 7 verso destra, 5 verso l'alto e 2 verso sinistra (con la limitazione che la pulce non deve uscire fuori dalla scacchiera), abbiamo che le posizioni degli spostamenti orizzontali nella sequenza da 14 possono essere scelte in $\binom{14}{9} = 2002$ modi, e possono essere riempite in $\binom{9}{7} - \binom{8}{7} - \binom{8}{7} - 1 = 19$, da cui $s_1 = 38038$;

- i quattro spostamenti aggiuntivi sono due spostamenti in alto e due spostamenti in basso: come prima, $s_2 = 38038$;

- i quattro spostamenti aggiuntivi sono uno per ogni direzione: con lo stesso ragionamento di prima si ottiene che $s_3 = \binom{14}{7} \cdot 5 \cdot 5 = 85800$.

Perciò $s = 161876$.
1876

Esercizio 23. Dire quante sono le permutazioni $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ di $\{1, 2, \ldots, 10\}$ tali che

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + |a_9 - a_{10}| = 49$$

Chiaramente il primo membro può essere sempre ricondotto ad una somma di 18 numeri interi, 9 positivi e 9 negativi, tali che considerato il multiinsieme dei loro valori assoluti abbiamo che tutti gli elementi di $\{1, 2, \ldots, 10\}$ vi compaiono due volte eccetto a_1 e a_{10}. Per questo motivo il massimo valore che può assumere il primo membro è $2 \cdot (10 + 9 + 8 + 7 - 4 - 3 - 2 - 1) + 6 - 5 = 49$, da cui tutte le permutazioni richieste sono tutte e le sole che mandano 1 in 6, 10 in 5 e i numeri dispari in $\{7, 8, 9, 10\}$, e le loro speculari (la permutazione speculare di $a_1, a_2, \ldots, a_n$ è $b_1, b_2, \ldots, b_n$ con $b_i = a_{11-i}$), ovvero $s = 2 \cdot (4!)^2 = 1152$.
1152

Esercizio 24. Sia D l'insieme di tutti i divisori di 1600, compresi 1 e 1600. Diciamo che un sottoinsieme B di D è **buono** se ogni elemento b di B divide tutti gli elementi di B maggiori di lui. Quanti sono i sottoinsiemi buoni non vuoti di D?

Innanzitutto notiamo che $1600 = 2^6 \cdot 5^2$. Sia $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ la funzione che associa ad (a, b) il numero di sottoinsiemi buoni (definiti analogamente) di $2^a \cdot 5^b$. Se consideriamo che f ha un'ovvia interpretazione grafica su di un piano cartesiano come *numero di modi di scegliere dei lattice points nel reticolo rettangolare delimitato dai vertici* $(0; 0)$ *e* (a, b) *per cui per ogni* (a_1, b_1) *e* (a_2, b_2) *scelti, se risulta che* $a_1 < a_2$ *allora* $b_1 \leq b_2$ *e similmente se* $b_1 < b_2$ *allora* $a_1 \leq a_2$, si vede facilmente che vale la seguente ricorsione:

$$f(a + 1, b + 1) = 2 \cdot [f(a + 1, b) + f(a, b + 1) - f(a, b)] + 1$$

Difatti gli insiemi buoni D necessariamente o contengono $2^{a+1} \cdot 5^{b+1}$ o non lo contengono:

- tutti quelli che non lo contengono sono $f(a+1, b)+f(a, b+1)-f(a, b)$, che si vede facilmente con l'interpretazione grafica di cui sopra;
- tutti quelli che lo contengono sono $f(a+1, b)+f(a, b+1)-f(a, b)+1$, in quanto se hanno più di un elemento si ottengono da quelli del caso precedente aggiungendo $2^{a+1} \cdot 5^{b+1}$; se invece hanno un solo elemento questo deve essere $2^{a+1} \cdot 5^{b+1}$, e quindi abbiamo un solo caso ($\{2^{a+1} \cdot 5^{b+1}\}$ per l'appunto).

Considerando poi che $f(b, 0) = f(0, b) = 2^{b+1} - 1$, è necessario un breve computo per determinare che $s = 5503$.
5503