Stage/Campionato Urbi et Orbi

Tecniche Varie di Combinatoria

20 Dicembre 2019

Soluzioni scritte da Luca Vantaggio. Per le immagini si ringrazia vivamente Antonio Giulio D'Antona.
L.S.S. "Giuseppe Battaglini", TARANTO.

Potrai trovare tutto il materiale didattico dello stage **(lezioni,testi,gare,risultati)** linkato alla pagina

http://www.problemisvolti.it/ZStageMateriale.html

Invece, potrai trovare l'elenco delle squadre iscritte al campionato *Stage Urbi et Orbi* linkato alla pagina:

http://www.problemisvolti.it/StageOlimpiadiMatematica.html

Nota: da ora in poi la soluzione di ogni esercizio sarà denotata con s.

Esercizio 1. In quanti modi diversi 6 amici possono sedersi nei 6 posti di una tavola rotonda? (Due configurazioni vanno considerate uguali, e quindi contate una sola volta, se si possono ottenere l'una dall'altra per rotazione)

Siccome tutti i possibili modi di posizionare i 6 ragazzi attorno al tavolo è 6!, l'insieme delle rotazioni G è un gruppo rispetto all'operazione di composizione e nessuna configurazione è invariante per rotazioni che non siano l'identità (gli amici sono persone distinte ovviamente), per il lemma di Burnside risulta che $s = \frac{1}{6} \cdot 6! = 5! = 120$.
120

Esercizio 2. **Eta,Zeta,Beta** e **Meta** sono 4 città tali che, comunque se ne scelgano 2, c'è sempre un volo diretto che le collega. Luca parte da **Beta** e vola da una città all'altra. In quanti modi diversi può fare una sequenza di 8 voli?

Siccome, per ogni $n \in \mathbb{N}$, dopo l'n-esimo volo (dove "dopo lo 0-esimo volo" vuol dire "all'inizio") posso sempre scegliere 3 destinazioni per l'$n+1$-esimo volo, allora evidentemente $s = 3^8 = 6561$.
6561

Esercizio 3. In quanti modi diversi 6 amici possono sedersi nei 6 posti di una tavola rotonda? (Due configurazioni vanno considerate uguali, e quindi contate una volta, se ogni persona è vicina alle stesse persone, senza curarsi di quale delle due persone vicine sia a destra e quale sia a sinistra)

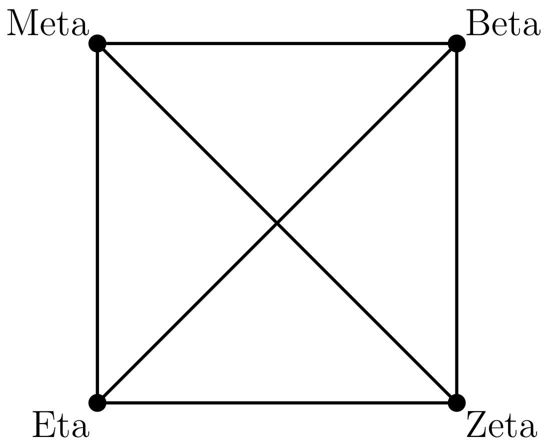
Ci sono sostanzialmente due approcci per risolvere questo problema:

- notare che tutte e le sole trasformazioni che rendono equivalenti due configurazioni sono l'identità, le simmetrie assiali con asse passante per uno degli amici (e sono 3), le simmetrie assiali con asse passante per il centro del tavolo e il punto medio di un arco delimitato da due amici seduti vicini (e sono 3) e le 5 rotazioni di angoli diversi da $2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ (e sono 5), e concludere dicendo che, siccome tutte le configurazioni sono invarianti unicamente per l'identità, per il lemma di Burnside risulta che $s = \frac{1}{1+3+3+5} \cdot 6! = 60$;

- notare che, una volta quozientato l'insieme delle configurazioni per tutte le possibili rotazioni come in 1, ogni schema di posti a sedere è ora contato da due classi di equivalenza, l'una speculare dell'altra, da cui $s = \frac{120}{2} = 60$.

120

Esercizio 4. **Eta,Zeta,Beta** e **Meta** sono 4 città tali che, comunque se ne scelgano 2, c'è sempre un volo diretto che le collega. Luca parte da **Beta** e vola da una città all'altra. In quanti modi diversi può fare una sequenza di 8 voli che termini nella città in cui è partito?



Definiamo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione dei numeri di sequenze di n voli che terminano in una città diversa da Beta, e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione dei numeri di sequenze di n voli che terminano in Beta. Diremo convenzionalmente che $a_0 = 0$ e $b_0 = 1$. Allora vale banalmente che per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 3b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$$

Difatti se dopo l'n-esimo volo Luca finisce in una città diversa da Beta, ha sempre e solo due destinazioni diverse da Beta a disposizione, mentre se Luca finisce in Beta, può (e anzi deve) scegliere fra tre possibili città diverse da Beta. Similmente, se dopo l'$n+1$-esimo volo Luca si trova in Beta, necessariamente dopo l'n-esimo si trovava in una città diversa da Beta.

Quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $b_{n+2} = a_{n+1} = 2a_n + 3b_n = 2b_{n+1} + 3b_n$. Da $b_0 = 1$ e $b_1 = 0$ si ottiene che

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
b_n	1	0	3	6	21	60	183	546	1641

e quindi $s = 1641$.

1641

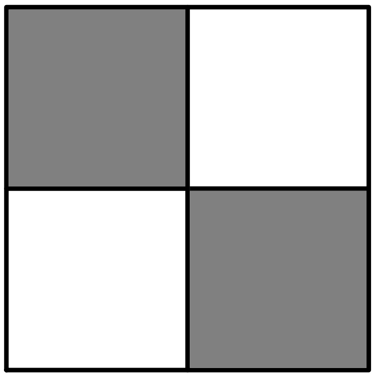
Esercizio 5. [**Summer School Assisi 2019**] Quanti diversi dadi dodecaedrici si possono costruire distribuendo i primi 12 numeri interi positivi sulle dodici facce di un dodecaedro regolare? Indicare come risposta le 4 cifre più basse del risultato. (Due dadi dodecaedrici sono da considerarsi uguali e quindi vanno contati una volta se esiste una rotazione nello spazio che li fa sovrapporre)

In *https://it.wikipedia.org/wiki/Dodecaedro* è possibile trovare una spiegazione esaustiva di tutte le possibili rotazioni del dodecaedro (che sono 60). Poiché stiamo attribuendo numeri interi differenti a facce differenti, non esistono invarianti per trasformazioni che non siano l'identità, da cui per il lemma di Burnside risulta che $s = \frac{1}{60} \cdot 12! \equiv 3360 \mod 10^4$.

3360

Esercizio 6. [**Summer School Assisi 2019**] Una pulce salta tra le 4 caselle di una tabella 2×2 rispettando la condizione che ogni salto avvenga fra due caselle che hanno un lato in comune. Quante sono le possibili sequenze di 10 salti consecutivi che hanno la casella di partenza diversa dalla casella di arrivo?

Per questioni di simmetria, scelta una casella di partenza il numero di percorsi di 10 salti che non ritornano nella casella scelta è lo stesso per ogni possibile punto di partenza, quindi possiamo supporre senza perdita di generalità che la pulce parta dalla casella in basso a sinistra. Coloriamo di nero le caselle in alto a sinistra e in basso a destra. Ad ogni salto il colore della casella su cui si trova la pulce cambia, da cui dopo un numero dispari di salti la pulce si troverà in una casella nera, mentre dopo un numero pari si troverà in una casella bianca. Quindi dopo il decimo salto la pulce si troverà o nell'angolo in basso a sinistra o nell'angolo in alto a destra.



E' facile notare (e si dimostra formalmente per induzione) che per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ risulta che il numero di percorsi che terminano in una casella di un colore è lo stesso dell'altra casella dello stesso colore. Infine il numero totale di percorsi di n salti è 2^n, visto che dopo l'x-esimo salto la pulce deve sempre scegliere fra due possibili destinazioni per l'$x+1$-esimo salto. Quindi, detto X il numero di percorsi di 10 salti che terminano nella casella in alto a destra, risulta che $2X = 2^{10}$, ovvero $X = 2^9$ e quindi $s = 4 \cdot 2^9 = 2048$.
2048

Esercizio 7. Una pulce salta sulla retta reale partendo dal punto $x = 0$ e facendo salti di lunghezza 1, in avanti o all'indietro, ma con la condizione aggiuntiva che, se la pulce si trova su un punto corrispondente ad un numero pari, il salto può essere solo in avanti. Quante sono le diverse sequenze di 20 salti che può fare?

Definiamo $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione dei numeri di percorsi di n salti (con $P_0 = 1$). Dalla considerazione che le classi $\overline{0}$ e $\overline{1}$ modulo 2 sono disgiunte e ad ogni salto la pulce passa da un elemento dell'una a quela dell'altra, allora dopo un numero dispari di salti si troverà su una numero dispari, mentre dopo un numero pari di salti si troverà su un numero pari. Quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} P_{2n+1} = P_{2n} \\ P_{2n+2} = 2 \cdot P_{2n+1} \end{cases}$$

Difatti ogni sequenza di $2n + 1$ salti si ottiene da una sequenza di $2n$ salti seguita da un ulteriore salto, ma dopo $2n$ salti la pulce si troverà su un numero pari (e quindi il $2n + 1$-esimo salto è fissato). Con minime modifiche (dovute al fatto che dopo $2n + 1$ salti la pulce è libera di andare avanti o indietro) si dimostra anche la seconda equazione. Di conseguenza per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta che $P_{2n+2} = 2 \cdot P_{2n+1} = 2 \cdot P_{2n}$ e quindi i termini pari della successione sono in progressione geometrica. Di conseguenza $s = P_{20} = 2^{10} = 1024$.
1024

Esercizio 8. [**Summer School Assisi 2019**] Quanti sono i numeri binari di 15 cifre che nei quali le cifre uguali a zero non sono mai in posizioni consecutive?

Definiamo $\{0_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ la successione che conta il numero di numeri binari diversi da 0 che sono di n cifre, che terminano con la cifra 0 e in cui non ci sono mai due cifre 0 consecutive , mentre $\{1_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ è la successione che conta i numeri binari di n cifre che terminano con la cifra 1 e per cui non ci sono mai due cifre 0 consecutive. Allora è evidente che per ogni valore naturale n risulta che:

$$\begin{cases} 0_{n+2} = 1_{n+1} \\ 1_{n+2} = 0_{n+1} + 1_{n+1} \end{cases}$$

Difatti se un numero di almeno due cifre termina con 0, il numero privato dell'ultima cifra deve terminare con 1 (altrimenti ci sarebbero due cifre 0 consecutive), mentre per i numeri che terminano con la cifra 1 non abbiamo siffatte limitazioni. Quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta che $0_{n+3} = 1_{n+2} = 0_{n+1} + 1_{n+1} = 0_{n+2} + 0_{n+1}$ (che è la stessa ricorsione di Fibonacci). Da $1_{n+1} = 0_{n+2}$ si ottiene che per ogni $n \geq 1$ vale $0_n + 1_n = 0_n + 0_{n+1} = 0_{n+2}$. Siccome $0_1 = 0$ e $0_2 = 1$, risulta quindi che

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

e dunque $s = 0_{17} = 987$.

987

Esercizio 9. [**Gara Tor Vergata 2009**] In quanti modi il numero 200 può essere scritto come somma di 3 numeri interi non negativi, eventualmente anche nulli? (due modi vanno considerati uguali se, a meno dell'ordine, sono composti dagli stessi numeri)

Innanzitutto determiniamo quante sono le terne di interi non negativi (x, y, z) tali che $x+y+z = 200$. Esse sono evidentemente tante quante i modi di distribuire 200 caramelle a 3 bambini, ovvero $\binom{202}{2} = 20301$. Quindi s conta il numero di configurazioni (x, y, z) contate a meno di permutazioni degli elementi che compongono la terna. Poiché gli elementi di S_3 sono l'identità, i tre 2-cicli $(1, 2), (1, 3), (2, 3)$ e i due 3-cicli $(1, 2, 3)$ e $(1, 3, 2)$, abbiamo quanto scritto nella tabella.

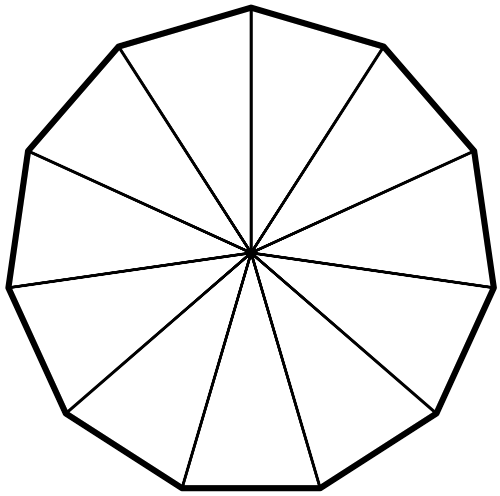
elementi di S_3	invarianti
identità	20301
$(1, 2)$	101
$(2, 3)$	101
$(1, 3)$	101
$(1, 2, 3)$	0
$(1, 3, 2)$	0

Difatti ogni terna è invariante per identità; gli elementi che sono invarianti per lo scambio di due elementi sono 101, cioè tante quante le terne in cui ci sono due interi positivi uguali nelle posizioni che vengono scambiate,(ad esempio le terne invarianti per $(1, 3)$ sono $(0, 200, 0), (1, 198, 1), (2, 196, 2), \ldots (100, 0, 100)$); infine non ci sono elementi invarianti per 3-cicli, giacché siffatte terne dovrebbero presentare tutte le componenti uguali, contrariamente al fatto che 200 non è multiplo di 3. Perciò, per il lemma di Burnside, $s = \frac{1}{6} \cdot (20301+101+101+101) = 3434$

3434

Esercizio 10. In un poligono regolare di 11 lati, ciascun lato viene colorato usando un colore a scelta tra **bianco,rosso** o **verde**, senza l'obbligo di usare tutti i colori.
In quanti modi diversi può farlo? (due colorazioni sono considerate uguali se esiste una rotazione o una simmetria assiale che le fa coincidere)

Come prima cosa determiniamo quali sono le simmetrie del problema: le simmetrie assiali sono tutte e le sole simmetrie con asse passante per il punto medio di un lato (e sono 11), mentre le rotazioni sono 11, una per ogni possibile angolo della forma $\overline{k} \cdot \frac{2\pi}{11}$ dove $\overline{k}$ è una classe di resto modulo 11. Dimostriamo ora che non ci sono invarianti, oltre a quelli banali, per rotazioni di $\overline{k} \cdot \frac{2\pi}{11}$ con $\overline{k} \neq \overline{0}$. Numeriamo i lati dell'endecagono con le classi di resto di $\mathbb{Z}_{11}$ attribuendo ad un lato la classe $\overline{0}$ e procedendo poi in senso antiorario con $\overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{10}$. Data una determinata colorazione, denotiamo con $C : \mathbb{Z}_{11} \to \{\textbf{bianco,rosso,verde}\}$ la funzione che associa al lato $\overline{k}$-esimo il proprio colore. Evidentemente la configurazione scelta è invariante per una rotazione di $\overline{k} \cdot \frac{2\pi}{11}$ se e solo se per ogni $\overline{j} \in \mathbb{Z}_{11} : C(\overline{j}) = C(\overline{j+k})$.



Ciò è equivalente a dire che per ogni $x \in \mathbb{Z}$ e per ogni $\overline{j} \in \mathbb{Z}_{11} : C(\overline{j}) = C(\overline{j+xk})$, da cui se $\overline{k} \neq \overline{0}$ si ha che per ogni $x \in \mathbb{Z} : C(\overline{0}) = C(\overline{xk})$ con $\mathbb{Z}_{11} = \{\overline{0}, \overline{k}, \overline{2k}, \ldots, \overline{10k}\}$ e quindi la configurazione deve essere una colorazione banale. Infine gli invarianti per simmetria sono tanti quanti i modi di fissare una metà dell'endecagono (che successivamente si ribalta nell'altra), cioè 3^6. Quindi quanto ci serve è racchiuso nella seguente tabella

Trasformazione	Invarianti
Identità	3^{11}
Rotazioni non banali	3 ognuna
Simmetria	3^6 ognuna

e perciò, per il lemma di Burnside, risulta che $s = \frac{1}{22} \cdot (3^{11} + 10 \cdot 3 + 11 \cdot 3^6) = 8418$

8418

Esercizio 11. Quanti sono gli anagrammi di **MATEMATICI** che iniziano per **C** e non hanno due lettere uguali vicine?

Partiamo con una considerazione preliminare: gli anagrammi di MATEMATICI siffatti sono tanti quanti gli anagrammi di MATEMATII senza due lettere uguali vicine, visto che la posizione della C è fissata. Denotiamo con X_1, X_2, X_3, X_4 rispettivamente gli insiemi di anagrammi di MATEMATII con due M,due T, due I e due A vicine. Chiaramente l'insieme di tutti gli anagrammi con almeno due lettere vicine è $\cup_{i=1}^{4} X_i$, la cui cardinalità per il principio di inclusione esclusione è

$$\sum_{i=1}^{4} |X_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} |X_i \cap X_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} |X_i \cap X_j \cap X_k| - |X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap X_4|$$

Siccome le M sono tante quante le T, le I e le A, allora ognuno degli addendi della somma precedente dipende solo dal numero di insiemi intersecati e non da quali sono in particolare gli insiemi di cui si considera l'intersezione, sfruttando la solita tecnica per cui si considerano i blocchi di due lettere uguali unite come un'unica lettera, si ottiene che la precendente somma vale proprio

$$\binom{4}{1}\binom{8}{2\ 2\ 2\ 1\ 1} - \binom{4}{2}\binom{7}{2\ 2\ 1\ 1\ 1} + \binom{4}{3}\binom{6}{2\ 1\ 1\ 1\ 1} - \binom{4}{4}\binom{5}{1\ 1\ 1\ 1\ 1} = 13920$$

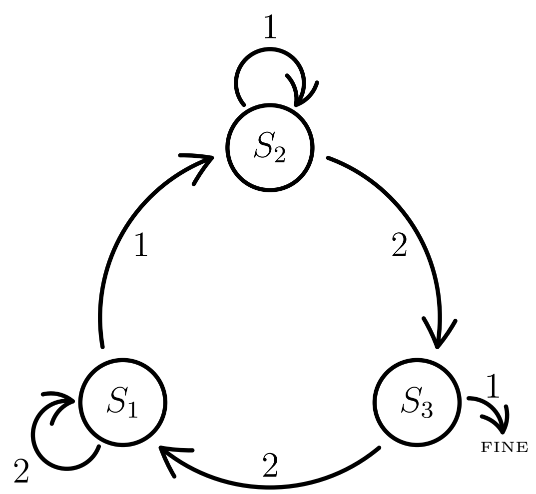
e quindi banalmente $s = \binom{9}{2\ 2\ 2\ 2\ 1} - 13920 = 8760$.

8760

Esercizio 12. Le caselle di una tabella 4×10 sono numerate da 1 a 40. In quanti modi posso scegliere 3 numeri distinti da 1 a 40, in modo che le tre corrispondenti caselle non abbiano nessun lato in comune?

Per il principio di inclusione-esclusione, la cardinalità dell'insieme S dei sottoinsiemi di 3 numeri tale che almeno due caselle condividono un lato è $(36+30) \cdot 38 - 4 \cdot 27 - 32 - 20 = 2508$. Questo perché, fissate due caselle adiacenti (cioè preso un blocco 2×1, e se ne possono scegliere $36+30$) la terza deve essere scelta fra le 38, da cui $(36+30) \cdot 38$ rappresenta la somma delle cardinalità degli S_{XY} insiemi dei sottoinsiemi di tre numeri che presentano X e Y, dove X e Y sono numeri adiacenti della tabella 4×10; a questo punto, per ottenere la cardinalità di S, dobbiamo sottrarre la somma delle cardinalità delle intersezioni a due a due (e basta, visto che le intersezioni a tre a tre sono vuote): le intersezioni a due a due graficamente o sono blocchi $3 \times 1, 1 \times 3$ (e sono $32+20$) o sono blocchi 2×2 privati di una casella: siccome ogni blocco da tre caselle non rettilinee individua un unico blocco 2×2 sulla griglia 4×10, mentre ogni blocco 2×2 (e sono 27) individua 4 blocchi da tre caselle, il numero di blocchi da tre siffatti è $4 \cdot 27$. Il valore precedentemente trovato è quindi pienamente giustificato. Dunque $s = \binom{40}{3} - 2508 = 7532$.
7532

Esercizio 13. Quanti sono i numeri di 8 cifre formati con le cifre 1 e 2 in cui esiste almeno una cifra 2 preceduta e seguita da una cifra 1?



Ci sono sostanzialmente due approcci per questo problema:

- un approccio olimpico, che si basa sul contare i casi a mano in maniera furba con il principio di inclusione-eslusione: se numeriamo le posizioni di ogni cifra all'interno del numero (ad esempio 11121111 le cifre 1 occupano tutte le posizioni esclusa la quarta, che è occupata dal 2), possiamo trovare s come cardinalità dell'insieme $\cup_{i=1}^{6} X_i$, dove gli X_i sono gli insiemi di numeri in cui le posizioni $i, i+1$ e $i+2$-esima sono occupate in quest'ordine da $1, 2, 1$. La cardinalità di ogni X_i è 2^5, visto che fissato il blocco 121 è possibile scegliere fra due cifre da mettere per ogni posizione restante, da cui $\sum_{i=1}^{6} |X_i| = 6 \cdot 2^5$. Le intersezioni a due a due non vuote sono o quelle in cui è presente nel numero un blocco 12121 (e se ne possono piazzare 4 di siffatti blocchi), oppure quelle in cui i due blocchi 121 non sono "fusi": le configurazioni con un blocco 12121 sono quindi $4 \cdot 2^3$, quelle con due blocchi separati 121 si contano come il prodotto delle permutazioni delle lettere $AABB$ per 2^2, giacché il numero di permutazioni di $AABB$ conta tutti i possibili modi di disporre i due blocchi 121 (cioè le A) e le due cifre restanti (cioè le B), mentre 2^2 conta i modi di attribuire un valore alle cifre restanti. Quindi $\sum_{1\leq i<j\leq 6}|X_i\cap X_j| = 4\cdot 2^3+\binom{4}{2}\cdot 2^2$. Infine le intersezioni a tre a tre sono $\{12121211, 12121212\}, \{11212121, 21212121\}, \{12121121\}, \{12112121\}$, ovvero la somma delle cardinalità delle intersezioni a tre a tre è 6. Siccome le intersezioni a quattro a quattro sono tutte vuote, per il principio di inclusione-esclusione risulta che $s = 6\cdot 2^5 - 4\cdot 2^3 - \binom{4}{2}\cdot 2^2 + 6 = 142$

- un approccio avanzato, che si basa sulla rappresentazione di un problema a stati finiti: ci proponiamo di contare tutte le parole di n cifre che variano fra 1 e 2 e che NON presentano il blocco 121. Supponiamo di voler costruire un automa che legge un qualsiasi numero di n cifre e che si ferma nella lettura se trova un blocco 121 o se ha terminato di leggere il numero. Diciamo che comincia a leggere il numero: fin quando legge 2 non ci sono problemi, visto che non ci sarà mai la possibilità di leggere 121. Questo primo stato (indicato in figura con S_1) lo denoteremo con **PEACE**. Ad un certo punto legge 1: ora c'è una possibilità concreta di poter leggere 121 se poi incontra il 2, quindi diciamo che fintanto che legge 1 il nostro automa si trova in un secondo stato (in figura S_2) che denoteremo con **WARNING**, mentre quando leggerà nuovamente 2 entrerà nel terzo stato (in figura S_3), che denoteremo con **FIRE**.Ora, se l'automa legge 2 allora si ritorna in PEACE, altrimenti si ferma. Se indichiamo con A_n la quantità di numeri di n cifre che variano fra 1 e 2 e che non presentano il blocco 121 (dove $A_0 := 1$ e corrisponde all'assenza di cifre, cioè il numero 0 che appartiene allo stato PEACE), per chi conosce un minimo di algebra lineare non sarà difficile rendersi conto che

$$A_n = (1\ 0\ 0)\cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

dove la matrice $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ è stata costruita definendo l'elemento $a_{i,j}$ come il numero di possibili letture che avrebbero fatto passare l'automa dallo stato S_i allo stato S_j. Definita M_n come la matrice $(1\ 0\ 0)\cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^n$

risulta quindi che

$$M_0 = (1\ 0\ 0)$$

$$M_1 = (1\ 0\ 0)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = (1\ 1\ 0)$$

$$M_2 = (1\ 1\ 0)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = (1\ 2\ 1)$$

$$M_3 = (1\ 2\ 1)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = (2\ 3\ 2)$$

$$M_4 = (2\ 3\ 2)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = (4\ 5\ 3)$$

$$M_5 = (4\ 5\ 3)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = (7\ 9\ 5)$$

$$M_6 = (7\ 9\ 5)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = (12\ 16\ 9)$$

$$M_7 = (12\ 16\ 9)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = (21\ 28\ 16)$$

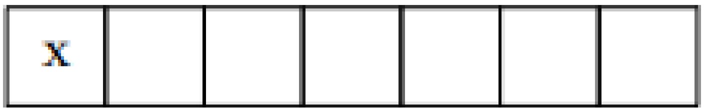
$$M_8 = (21\ 28\ 16)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = (37\ 49\ 28)$$

da cui $A_8 = 37 + 49 + 28 = 114$ e dunque $s = 2^8 - 114 = 142$.

142

Un commento al secondo metodo: apparentemente può sembrare più lungo e "troppo colto" per l'ambiente olimpico, ma a parere dello scrivente andrebbero prima considerato i seguenti fatti: innanzitutto in pratica permette di computare agevolmente la soluzione del problema per un n qualsiasi. Cosa avremmo dovuto fare se la traccia ci avesse chiesto di computare la somma dei numeri di soluzioni del problema per $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$? Con il primo metodo ci saremmo sparati, con il secondo la cosa si sarebbe ridotta a svolgere altre trenta addizioni o giù di lì. Inoltre, c'è da considerare che nella pratica tutti i ragionamenti preliminari all'algoritmo risolutivo sono necessari solo per spiegare il metodo risolutivo, ma una volta compreso il suo funzionamento in effetti è solo una questione di conti, nemmeno troppo difficili visto che c'è un'abbondanza di 0 e 1 inaudita.

Esercizio 14. Una pulce si trova nella casella segnata con la **X** della tabella in figura e si muove saltando tra le caselle vicine. Quanti diversi percorsi lunghi 13 passi può fare?



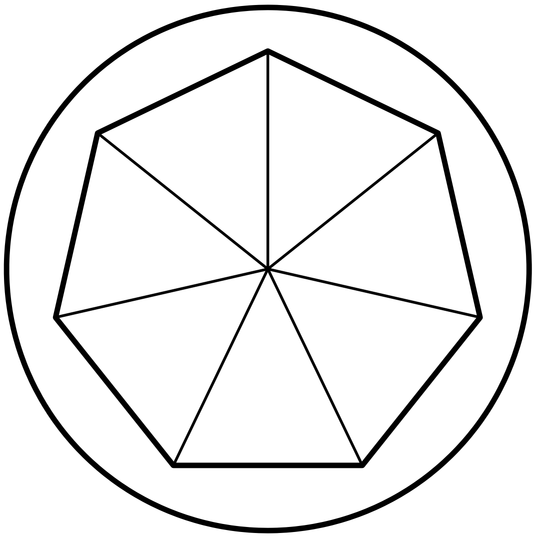
Probabilmente (o anzi sicuramente) ci sono risoluzioni molto skillate per questo problema, ma l'approccio computazionale comunque è molto fattibile:

n salti	1^a casella	2^a casella	3^a casella	4^a casella	5^a casella	6^a casella	7^a casella
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0	0
3	0	2	0	1	0	0	0
4	2	0	3	0	1	0	0
5	0	5	0	4	0	1	0
6	5	0	9	0	5	0	1
7	0	14	0	14	0	6	0
8	14	0	28	0	20	0	6
9	0	42	0	48	0	26	0
10	42	0	90	0	74	0	26
11	0	132	0	164	0	100	0
12	132	0	296	0	264	0	100
13	0	428	0	560	0	364	0

dove il numero nella casella individuata dall'intersezione fra la riga nel numero di salti i e la colonna della j-esima casella (cioè $N_{i,j}$) è il numero di percorsi lunghi i salti che terminano nella j-esima casella. La tabella è stata riempita considerando che $\forall i \in \mathbb{N}^*, \forall j \in [2,6] \cap \mathbb{N} : N_{i,j} = N_{i-1,j-1} + N_{i-1,j+1}$ e $\forall i \in \mathbb{N}^* : N_{i,1} = N_{i-1,2} \wedge N_{i,6} = N_{i-1,5}$.
Quindi $s = 428 + 560 + 364 = 1352$.
1352

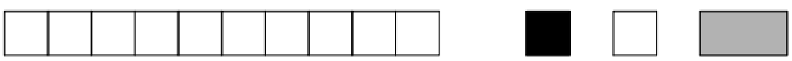
Esercizio 15. Ciascuna delle 8 facce (base compresa) di una piramide regolare a base ettagonale viene colorata di **blu, verde, giallo, arancio** e **rosso**, con l'obbligo di usare tutti i colori. Quante sono le diverse colorazioni possibili? (Due colorazioni vanno considerate identiche e quindi contate una sola volta se c'è una rotazione nello spazio che le fa sovrapporre) Dare come risposta le ultime 4 cifre del risultato.

In figura viene rappresentata la base dell'ettagono regolare con il cerchio e le facce superiori con l'ettagono. Innanzitutto notiamo che le simmetrie del problema sono tutte e le sole rotazioni di $\overline{k} \cdot \frac{2\pi}{7}$ con $\overline{k} \in \mathbb{Z}_7$ e asse passante per il vertice superiore della piramide e il circocentro dell'ettagono di base. Riadattando il ragionamento usato nel problema 10, siccome 7 è primo abbiamo che gli invarianti per rotazioni diverse dall'identità sono solo le configurazioni banali delle facce superiori , che però usano al più 2 colori (uno per le facce triangolari e uno per la faccia ettagonale). Quindi abbiamo solo invarianti per l'identità.



Quindi il fulcro del problema consiste nel contare correttamente il numero di colorazioni possbili che usano tutti i colori. Numeriamo le facce da 1 a 8. Allora il numero di colorazioni è ovviamente pari al numero di funzioni $f : \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \to \{\textbf{blu,verde,giallo,arancio,rosso}\}$, che è $S = \sum_{i=0}^{4} \binom{5}{5-i}(-1)^i(5-i)^8$. Visto che scritta così è una formula pesante da digerire, espandiamola e interpretiamo il significato di ogni termine: essa è $\binom{5}{5} \cdot 5^8 - \binom{5}{4} \cdot 4^8 + \binom{5}{3} \cdot 3^8 - \binom{5}{2} \cdot 2^8 + \binom{5}{1} \cdot 1^8$. $\binom{5}{5}5^8$ è il numero totale di funzioni fra i due insiemi, $\binom{5}{4} \cdot 4^8$ è la somma delle cardinalità degli insiemi di funzioni in cui un colore (fissato) non è immagine di nessun numero, $\binom{5}{3} \cdot 3^8$ è la somma delle cardinalità delle intersezioni a due a due degli insiemi di funzioni in cui un dato colore non è immagine di nessun numero ecc.
Questo, per il principio di inclusione-esclusione, vuol dire che S è la differenza fra il numero totale di funzioni e quelle in cui almeno un colore non viene usato, cioè è il numero di funzioni suriettive fra i due insiemi. Per il lemma di Burnside abbiamo quindi che $s = \frac{S}{7} = 18000$.
8000

Esercizio 16. Vogliamo tassellare una striscia di 10 quadrati usando quadrati di colore bianco o nero e rettangoli di colore grigio formati unendo due quadrati. In quanti modi possiamo farlo se vogliamo cominciare e finire con tasselli uguali?



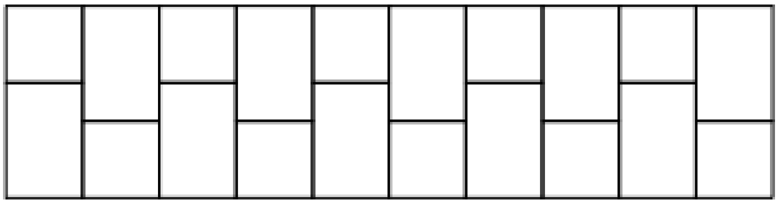
Definiamo $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ la successione che conta il numero di possibili tassellazioni di blocchi $1 \times n$ con i blocchi colorati della figura (senza che necessariamente il blocco iniziale sia lo stesso del blocco finale). Chiaramente per ogni $n \in N^*$

risulta che $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$. Difatti, delle tassellazioni di $n+2$ quadretti, $2a_{n+1}$ sono quelle che terminano o con un quadretto nero o con un quadretto grigio, mentre a_n sono quelle che terminano con un rettangolo grigio. Da $a_1 = 2$ e $a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ si ottiene che i valori della successione fino a $n = 8$ sono i seguenti:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	2	5	12	29	70	169	408	985

A questo punto è facile notare che $s = 2a_8 + a_6 = 2139$, visto che se la prima e l'ultima tessera usata sono di un quadretto (o bianco o nero), il centro lo possiamo tassellare in a_8 modi, mentre se la prima e l'ultima tessera sono un rettangolino grigio, allora possiamo tassellare i restanti sei quadretti in a_6 modi.
2139

Esercizio 17. Vogliamo scrivere i numeri interi da 1 a 20, ciascuno esattamente una volta, nelle 20 caselle della figura in modo che valga la seguente proprietà: *se due caselle hanno in comune una parte di lato verticale, il numero scritto in quella più a destra è più grande.*
In quanti modi possiamo farlo se vogliamo che il 18 venga scritto sull'ultima colonna?



Definiamo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ tutti i possibili modi di riempire una tabella $1\times 2n$ costruita come quella in figura con i numeri da 1 a $2n$ facendo in modo che valga la proprietà nella traccia. Chiaramente vale la seguente ricorsione: $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$. Difatti sull'ultima colonna si possono trovare solo o $2n+4$ e $2n+3$ in qualche ordine, e quindi la tabella restante si può riempire in a_{n+1} modi, o $2n+4$ e $2n+2$ messi nell'ordine per cui $2n+4$ condivide il lato verticale con tutte e due le caselle della $n+1$-esima colonna, da cui $2n+3$ occupa le $n+1$-esima colonna ma in posizione non contigua a $2n+2$, e $2n+1$ occupa la casella restante della $n+1$-esima colonna: perciò in questo caso la parte restante si può coprire in a_n modi. Usando questo stesso ragionamento è facile vedere che $s = a_8$. Siccome $a_1 = 2$ e $a_2 = 5$, riciclando la tabella dell'esercizio precedente abbiamo che $s = a_8 = 985$.
985

Esercizio 18. Ciascuna delle 6 facce di un cubo viene colorata di **blu, verde, giallo, arancio** o **rosso**, senza l'obbligo di usare tutti i colori e in modo che non ci siano facce dello stesso colore con lati in comune. Quante sono le diverse colorazioni possibili? (Due colorazioni vanno considerate identiche e quindi contate una sola volta se c'è una rotazione nello spazio che le fa sovrapporre)

Innanzitutto contiamo quante sono tutte le possibili colorazioni. Denoteremo le facce del cubo (con ovvia interpretazione) con faccia frontale, faccia laterale destra, faccia laterale sinistra, faccia del retro (e assieme costituiscono le facce laterali), base inferiore e base superiore (e assieme costituiscono le basi). Se coloriamo le facce laterali ognuna con colori diversi, allora in tutto abbiamo $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ colorazioni del cubo. Se coloriamo la faccia frontale dello stesso colore di quella di retro e le le rimanenti laterali con colori diversi abbiamo $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2^2$ possibili colorazioni, e coloriamo con lo stesso colore le facce laterali destra e sinistra e con colori diversi la faccia frontale e del retro. Se infine usiamo coloriamo le facce laterali con colori a due a due uguali, allora abbiamo $5 \cdot 4 \cdot 3^2$ colorazioni. Quindi in totale le colorazioni sono $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2^3 + 5 \cdot 4 \cdot 3^2$. E' noto, per quanto visto a lezione, che le rotazioni del cubo sono

24, ma si può notare che per le limitazioni del problema le uniche rotazioni che ammettono degli invarianti sono le rotazioni di π attorno ad un asse congiungente due facce opposte (e sono 3), e per ognuna di siffatte rotazioni abbiamo $5 \cdot 4 \cdot 3^2$ invarianti. Per il lemma di Burnside, quindi, $s = \frac{1}{24} \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2^3 + 5 \cdot 4 \cdot 3^2 + 5 \cdot 4 \cdot 3^3) = 55$.
55

Esercizio 19. In quanti modi si possono distribuire i primi 6 numeri interi positivi sulle 8 facce di un ottaedro regolare con l'obbligo di usare tutti i numeri almeno una volta? (Due distribuzioni vanno considerate identiche e quindi contate una sola volta se c'è una rotazione nello spazio che le fa sovrapporre).

Innanzitutto il nostro claim è che le rotazioni sono 24. Certo, le potremmo contare a manina, ma se consideriamo che l'ottaedro è il solido platonico duale del cubo e viceversa, è piuttosto palese che una qualsiasi simmetria di rotazione o assiale sul cubo ne induce un'altra sull'ottaedro e viceversa. Il nostro claim è quindi dimostrato. Inoltre, siccome dobbiamo usare tutti i numeri almeno una volta, è piuttosto facile rendersi conto che non è possibile che esista una trasformazione che non sia l'identità che produce invarianti. Quindi è solo questione di contare tutte le possibili colorazioni e dividere il numero ottenuto per 24 come conseguenza del lemma di Burnside. Chiaramente ci sono solo due possibilità: o esattamente due numeri si ripetono due volte (e le configurazioni siffatte sono $\binom{6}{2} \cdot \binom{8}{2\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1}$) oppure esattamente un numero si ripete tre volte (e le configurazioni siffatte sono $\binom{6}{1} \cdot \binom{8}{3\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1}$). Quindi $s = \frac{1}{24} \cdot [\binom{6}{2} \cdot \binom{8}{2\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1} + \binom{6}{1} \cdot \binom{8}{3\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1}] = 7980$.
7980

Esercizio 20. [**Summer School Assisi 2019**] Ho una tabella 4×15 e devo ricoprirla interamente usando 20 tasselli 3×1. In quanti modi diversi possiamo farlo?

Definiamo $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}, \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ rispettivamente le successioni che contano il numero di modi di tassellare tabelle $4 \times 3n$, tabelle $4 \times (3n-1)$ a cui è stato attaccata (in continuità con uno degli angoli a destra) un blocco 1×1, tabelle $4 \times (3n-2)$ a cui è stato attaccata (in continuità con uno degli angoli a destra) un blocco 1×2. Dimostriamo che valgono le seguenti ricorrenze:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2b_{n+1} + a_n \\ b_{n+1} = b_n + c_n + a_n \\ c_{n+1} = a_n + c_n \end{cases}$$

Difatti o uno dei due angoli di una tabella $4 \times 3n + 3$ è parte di un tassello verticale (e quindi la parte restante si può riempire in b_{n+1} modi), o sono entrambi parte di un blocco orizzontale (e quindi la parte restante si può tassellare in a_n modi). Con simili ragionamenti si giustificano le altre ricorrenze. Come conseguenza della definizione che abbiamo offerto, risulta che $s = a_5$, da cui è sufficiente qualche computo per determinare la soluzione del problema.

n	1	2	3	4	5
a_n	3	13	57	249	1087
b_n	1	5	22	96	419
c_n	1	4	17	74	323

e quindi $s = 1087$.
1087

Esercizio 21. [**Summer School Assisi 2019**] Quante sono le sequenze finite di uno o più numeri interi strettamente positivi, non tutti dispari, ed aventi come somma 10?

Definiamo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ rispettivamente le successioni che contano l'una quante sono le sequenze finite di uno o più numeri interi strettamente positivi, non tutti dispari, e aventi come somma n, l'altra quante sono le sequenze finite di uno o più numeri interi strettamente positivi tutti dispari e aventi come somma n. Dimostriamo che per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ valgono la seguente relazione:

$$b_n = \sum_{\substack{i \not\equiv n \mod 2 \\ 1\le i<n}} b_i + f(n)$$

con $f(n) = \begin{cases} 1 \text{ } se \text{ } n \text{ } dispari \\ 0 \text{ } altrimenti \end{cases}$.

Difatti, data una sequenza di interi dispari la cui somma è n, se tale sequenza è composta da un solo elemento allora deve essere n, e quindi ci sono $f(n)$ sequenze di un solo elemento. Se invece è composta da 2 o più numeri, questa si ottiene da una sequenza di interi dispari la cui somma è un numero $i \not\equiv n \mod 2$ con $i < n$ aggiungendogli $n - i$ alla fine. La ricorrenza è quindi pienamente giustificata. Quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta che

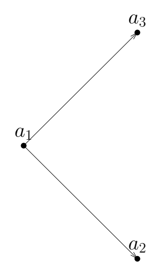
$$b_{n+2} = \sum_{\substack{i \not\equiv n+2 \mod 2 \\ 1\le i<n+2}} b_i + f(n+2) = b_{n+1} + \sum_{\substack{i \not\equiv n \mod 2 \\ 1\le i<n}} b_i + f(n) = b_{n+1} + b_n$$

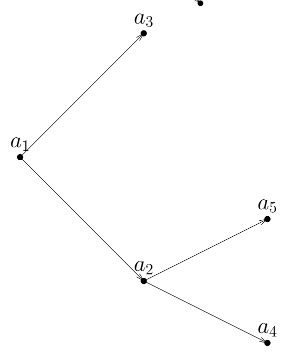
che è la ricorrenza di Fibonacci. Inoltre $b_1 = 1 = F_1$ e $b_2 = 1 = F_2$, da cui per ogni $n \in N^*$ risulta che $b_n = F_n$. Siccome $a_n + b_n$ rappresenta il numero totale di rappresentazioni di n come sequenza di interi la cui somma è n, deve risultare che $a_n + b_n = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{n-1}{j} = 2^{n-1}$: difatti $\binom{n-1}{j} = \binom{n-j+j-1}{j}$ è il numero di modi di distribuire $n - j$ caramelle a j bambini, cioè di distribuire n caramelle a j bambini facendo sì che ognino ne recapiti almeno una. Quindi $s = 2^9 - F_{10} = 512 - 55 = 457$.

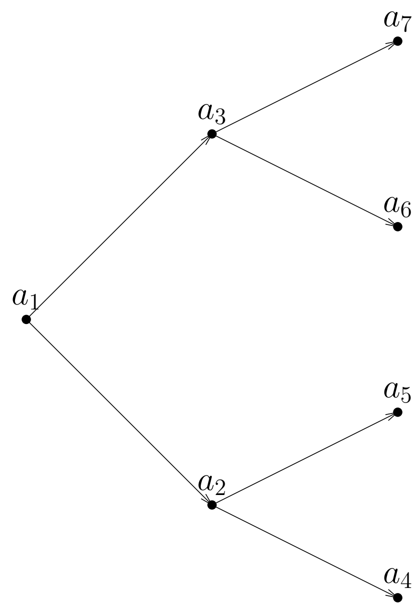
457

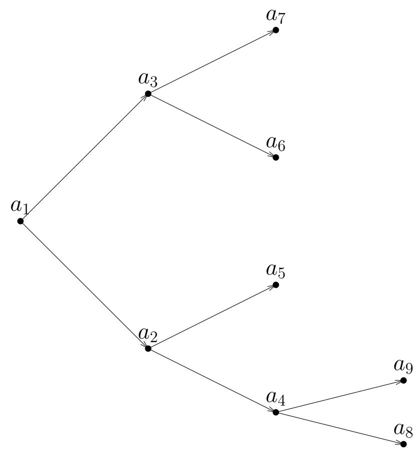
Esercizio 22. [**Disfida Urbi et Orbi 2016**] Dire quante sono le permutazioni $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{13})$ dei numeri interi da 1 a 13 tali che $a_i < a_{2i}$ e $a_i < a_{2i}$ per ogni $i = 1, \dots, 6$. Se il risultato ha più di 4 cifre, dare come risposte le sue ultime 4 cifre.

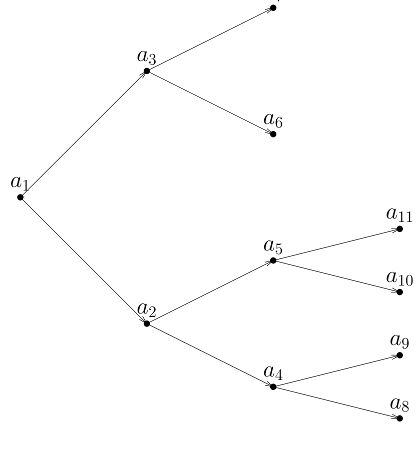
Sia $\{f_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione che conta quante sono le permutazioni degli interi da 1 a $2n+1$ per cui $\forall i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$: $a_i < a_{2i} \wedge a_i < a_{2i+1}$. Consideriamo i seguenti grafi:

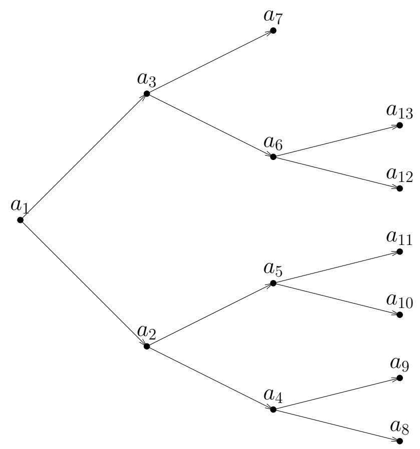





a_7
a_3
a_6
a_1
a_5
a_2
a_4


a_7
a_3
a_6
a_1
a_5
a_2
a_9
a_4
a_8


a_7
a_3
a_6
a_1
a_{11}
a_5
a_{10}
a_2
a_9
a_4
a_8



in ognuno di questi grafi, due elementi sono stati collegati in accordo ai vincoli del problema, cioè facendo in modo che a_i sia collegato a a_{2i} e a_{2i+1} dove possibile. Rappresentando il problema risultano evidenti i seguenti fatti:

- a_1 è sempre 1 (in quanto deve essere minore di tutti gli altri a_i);
- privando un grafo dell'elemento a_1 si ottengono due sottografi sconnessi della stessa forma di due grafi disegnati precedentemente. Ad esempio togliendo a_1 nel grafo a 13 vertici si ottengono due sottografi di cui uno a 5 vertici e l'altro a 7 vertici. Questo significa che ogni configurazione del grafo a 13 vertici individua una coppia di configurazioni dei grafi a 5 e 7 vertici a meno di rinominare i numeri usati: ad esempio se nel sottografo ad 5 vertici avessimo i numeri $5, 6, 9, 10, 12$, associando al 5 il numero 1, al 6 il numero 2, al 9 il numero 3, al 10 il numero 4 e al 12 il numero 5 otterremmo una permutazione ammissibile dei numeri da 1 a 5. Inoltre, scelti due sottoinsiemi, uno da 7 numeri e l'altro da 5 numeri dall'insieme $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$, attraverso queste associazioni è possibile costruire una configurazione ammissibile per il grafo da 13 (e queste osservazioni non valgono solo per 13 ovviamente).

Quindi $s = f_{13} = \binom{12}{7} f_7 \cdot f_5$ con $f_7 = \binom{6}{3} f_3^2 = 20 \cdot 4 = 80$ e $f_5 = \binom{4}{3} f_3 = 8$. Perciò $s = 792 \cdot 80 \cdot 8 = 506880$.
6880

Esercizio 23. Una pulce salta sulla retta dei numeri: parte da zero e fa una sequenza di 7 salti di lunghezze tutte diverse. Ogni salto può essere in o avanti all'indietro , e la sua lunghezza è del tipo 3^n, con $0 \leq n \leq 6$. Quante sono le diverse sequenze di salti per le quali , durante tutto il percorso, la pulce non tocca mai un numero negativo? Dare come risposta le ultime 4 cifre del numero trovato.

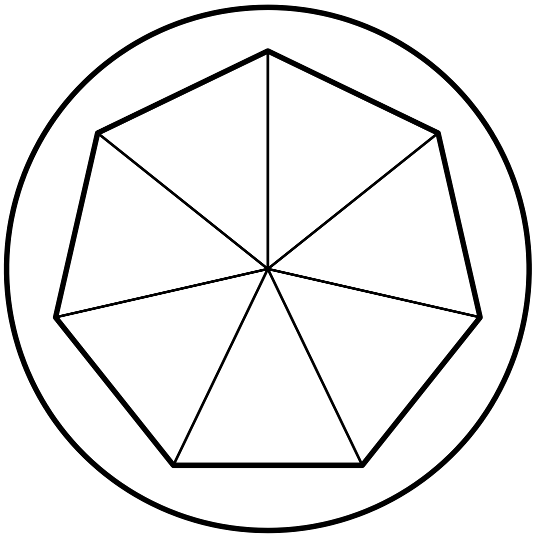
Denotiamo con $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ la successione che conta il numero di sequenze di n salti (in avanti o all'indietro) tutti diversi, della forma 3^i con $1 \leq i \leq n$, per le quali la pulce non tocca mai un numero negativo. Dimostriamo per induzione che su n che se rimpiazziamo l'insieme $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ degli esponenti delle potenze del 3 con un qualsiasi altro sottoinsieme di n numeri naturali, il numero di sequenze come quelle descritte dalla traccia non cambia:

1. se $n = 1$ allora qualunque sia l'esponente, il passo deve essere in avanti;
2. supponiamo ora che per ogni $k \leq n$ la proprietà è vera e dimostriamola per $n + 1$. Siccome $3^{x+1} > \sum_{i=1}^{x} 3^x$ per ogni $x \in \mathbb{N}$, allora il passo che ha per lunghezza la potenza di 3 massima (rispetto ad un qualunque sottoinsieme di $n + 1$ esponenti) deve essere fatto in avanti, da cui una qualsiasi sequenza di passi è corretta se e solo se il passo più lungo è fatto in avanti e prima di fare il passo più lungo la pulce non ha mai toccato numeri negativi. Questo ci dice che, a prescindere dall'insieme di $n+1$ esponenti scelto, per ipotesi induttiva il numero di percorsi corretti deve essere $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot a_j \cdot 2^{n-j}(n-j)!$: difatti $\binom{n}{j} a_j$ è il numero di modi di scegliere le lunghezze dei passi da eseguire prima di quello massimo e eseguirli in maniera corretta, mentre $2^{(n-j)} j!$ è il numero di modi di riordinare le lunghezze dei passi rimaste e scegliere se, per ognuno dei passi, eseguirlo all'indietro o in avanti.

Con questa dimostrazione abbiamo anche provato che $a_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot a_j \cdot 2^{n-j}(n-j)!$. Ora, sfruttando questa ricorrenza e svolgendo i conti modulo 10000 si ottiene che $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ sono rispettivamente congrui a $1, 3, 15, 105, 945, 395, 5135$ modulo 10000. Quindi $s = 5135$.
5135

Esercizio 24. Ciascuna delle 8 facce (base compresa) di una piramide regolare a base ettagonale viene colorata di **blu, verde, giallo, arancio** o **rosso** (senza l'obbligo di usare tutti i colori) in modo che ogni eventuale faccia rossa abbia in comune esattamente un lato con un'altra faccia rossa mentre per tutti gli altri colori non ci siano facce dello stesso colore con lati in comune. Quante sono le diverse colorazioni possibili? (Due colorazioni vanno considerate identiche e quindi contate una sola volta se c'è una rotazione nello spazio che le fa sovrapporre).

Per la figura vale la stessa convenzione del problema 15. Per quanto dimostrato sempre nel problema 15, con minimi riadattamenti, abbiamo che l'unica simmetria con invarianti è l'identità. Per contare ora quante sono le colorazioni possibili distinguiamo più casi:



- la base è colorata di rosso. Allora esattamente un'altra faccia è colorata di rosso (e può essere scelta in 7 modi) e le restanti si possono colorare in $4 \cdot 3^5$ modi. Quindi ci sono $7 \cdot 4 \cdot 3^5$ colorazioni di questo tipo;
- la base non è rossa ma ci sono esattamente due facce rosse: il colore della base può essere scelto in 4 modi, le due facce rosse in 7 modi e le facce restanti possono essere colorate in $3 \cdot 2^4$ modi. Quindi ci sono $7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2^4$ colorazioni di questo tipo;
- la base non è rossa ma ci sono esattamente 4 facce rosse (chiaramente non ce ne possono essere di più): allora il numero di colorazioni di questo tipo è $4 \cdot \frac{7}{2} \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 2$.Difatti, fissate le prime due facce rosse, e si possono scegliere in 7 maniere, le altre due facce rosse si possono piazzare in 2 modi e le facce restanti si possono colorare in $3^2 \cdot 2$ modi. D'altro canto ogni configurazione è stata contata dua volte (una per ogni blocco di due facce rosse), ed ecco come si giustifica $\frac{1}{2}$. Chiaramente 4 è il numero di modi di scegliere il colore della base dell'ettaedro;
- nessuna faccia è rossa: fissato il colore della base (e nuovamente si può scegliere in 4 modi), il numero di colorazioni della base è $2^7 - 2$, in quanto, denotata con $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N} - \{0,1,2\}}$ la successione che conta il numero di modi di colorare i lati di un n-agono con 3 colori facendo sì che non ci siano mai due lati adiacenti dello stesso colore, allora $a_{n+1} = 3 \cdot 2^n - a_n$. Difatti, numerati i lati da 1 a $n+1$, $3 \cdot 2^n$ conta il numero di modi di colorare i lati facendo sicché i e $i+1$ non siano mai dello stesso colore per $i = 1, 2, \ldots, n$, mentre a_n conta il numero di modi colorare i lati da 1 a $n+1$ facendo sì che gli unici lati contigui dello stesso colore siano solo 1 e $n+1$. Dunque $a_7 = 3 \cdot (2^6 - 2^5 + 2^4 - 2^3) + a_3 = 3 \cdot (2^6 - 2^5 + 2^4 - 2^3 + 2) = 2^7 - 2$ e perciò ci sono $4 \cdot (2^7 - 2)$ colorazioni di questo tipo.

Per il lemma di Burnside risulta quindi che $s = 4 \cdot 3^5 + 2^6 \cdot 3 + 2^3 \cdot 3^2 + 4 \cdot \frac{2^7-2}{7} = 1308$.
1308