Roma, 30 Novembre 2018

Stage Olimpico Urbi et Orbi

Modulo n.4 - gara a tema: Congruenze

Nota per l'insegnante. Questa gara è la quarta di 10 gare a tema che costituiscono lo stage Urbi et Orbi ed è, come al solito, divisa in due parti: la prima parte è costituita da problemi standard che servono a testare la preparazione dei neofiti, mentre la seconda, pur non richiedendo più nozioni della prima, richiede un po' di creatività in più. Nella lezione tenuta presso l'ateneo **Tor Vergata**, che ha preceduto la gara, sono state fornite le basi per risolvere i problemi della prima parte, mentre nella discussione post gara si discuterà dei problemi della seconda.
Per le scuole (o i distretti) che invece organizzanno le lezioni **per conto proprio**, partecipando solo alle gare, la modalità di utilizzo della gara dipende dalla preparazione degli studenti: se sono principianti consiglio di far precedere la gara da una o più lezioni, se invece sono sufficientemente preparati si può partecipare direttamente alla gara.
Segnalatemi la vostra partecipazione in modo che possa eventualmente fornirvi il materiale che utilizzo per le lezioni, mandandomi una mail a: callegar@mat.uniroma2.it . Nella mail abbiate cura di inserire anche un numero di cellulare in modo che possa inserirvi nel gruppo whatsapp dello stage.

I parte: problemi standard

1. Una pulce salta sull'asse x partendo dal punto 1 e facendo salti in avanti lunghi 137 unità. Qual è il minimo numero di salti che deve fare per toccare un multiplo di 8.

2. Chiamato $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, la somma $S = 1! + 2! + 3! + \ldots + 999!$ risulta essere un numero grandissimo. Qual è il resto che si ottiene dividendo S per 100?

3. Trovare il più piccolo multiplo positivo di 3 che diviso per 23 da resto 11.

4. Qual è il più piccolo intero positivo n tale che $601n + 17$ è un multiplo di 2016.

5. Qual è la cifra delle unità di 7^{2003}?

6. Qual è la cifra delle unità di 2^{2003}?

7. Quali sono le ultime 2 cifre di 3^{2003}?

8. Quali sono le ultime 2 cifre di 12^{2003}?

9. [**Summer School Assisi 2018**] A Francesco viene chiesto di sostituire delle cifre al posto degli zeri al terzo e al quinto posto nel numero 3.000.003 in modo da ottenere un numero N multiplo di 13. Francesco si accorge che questo può essere fatto in vari modi ma che in un solo caso il numero N ottenuto è anche multiplo di 11. Quanto vale N? (dare come risposta le ultime 4 cifre di N)

10. [**Summer School Assisi 2018**] Determinare il più grande $n < 10000$ tale che $n + 2$ sia multiplo di 11, $n + 4$ sia multiplo di 13 e tale che $n + 6$ sia multiplo di 15.

11. Il numero n ha 280 cifre ed è stato ottenuto scrivendo 70 volte, senza interporre alcuno spazio, il numero 2018. Che resto si ottiene dividendo n per 101?

12. Del numero n sappiamo che se lo scrivessimo in base 17 avrebbe esattamente 1997 cifre, tutte uguali a 1. Che resto si ottiene dividendo n per 16?

II parte: altri problemi

13. [**Gara Tor Vergata 2016**] Sia $n = 15328471582$, che resto si ottiene dividendo n^{10} per 495?

14. Trovare il più piccolo numero pari n con la seguente proprietà: comunque si prenda un numero primo p, con $3 \leq p \leq 17$, dividendo n per p si ottiene come resto $p - 1$. Dare come risposta le sue 4 cifre più basse.

15. [**Gara Tor Vergata 2018**] Trovare le 4 cifre più basse (cioè migliaia, centinaia, decine ed unità) di $2^{10^{2018}}$.

16. [**Summer School Assisi 2018**] Dire quante sono le soluzioni reali, comprese tra 0 e 1000 inclusi, dell'equazione

$$x + \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2x}{3} \right\rfloor .$$

17. [**Disfida Urbi et Orbi 2014**] Dopo aver posto $a_0 = 624$, per ogni n intero strettamente positivo definiamo $a_n = 624^{a_{n-1}}$. Dire che resto si ottiene dividendo a_{2014} per 10000.

18. [**Gara Tor Vergata 2009**] Sul pianeta Tondo, l'anno è composto da 10.000 giorni, numerati da 1 a 10.000. Su tale pianeta vivono tre fratellini: Claudia, Luca e Marco. Claudia dice la verità solo nei giorni dell'anno che sono multipli di 36, mentre è bugiarda in tutti gli altri giorni. In modo del tutto analogo Luca dice la verità solo nei giorni che sono multipli di 19 e Marco dice la verità solo nei giorni pari.
Si consideri il seguente dialogo:

Claudia: - Domani sarò una bugiarda.
Luca: - Domani sarò un bugiardo.
Marco: - Almeno uno di voi due sta mentendo.

Qual è il primo giorno dell'anno in cui tale dialogo si può svolgere? (indicare 0 se si ritiene che tale dialogo non si possa svolgere in alcun giorno)

19. Quando si prendono su una circonferenza 7 punti A, B, C, D, E, F e G, in quest'ordine, in modo che la dividano in 7 archi uguali, ci sono due modi di unirli senza staccare la matita dal foglio in modo da tracciare una stella regolare a sette punte: $A-C-E-G-B-D-F-A$ e $A-D-G-C-F-B-E-A$.
Se i punti, invece di 7, fossero 2015, quante sarebbero le stelle regolari, aventi tali punti come vertici, che si possono tracciare senza staccare la matita dal foglio?

20. [**Summer School Assisi 2018**] Il numero $n = 504737$ è il prodotto di due primi p e q con $p < q$. Sappiamo che $\varphi(n) = 503316$. Quanto vale $p + 2q$?

21. [**Disfida Urbi et Orbi 2018**] Un numero x si può esprimere come somma di potenze 2017-esime dispari, a due a due distinte. Quanti valori diversi può assumere il resto della divisione di x per 2018 al variare di tali x?

22. [**Disfida Urbi et Orbi 2014**] Posto $f(1) = 23$, per ogni $n \geq 2$ indichiamo con $f(n)$ il più piccolo numero M strettamente maggiore di $f(n-1)$ tale che la cifra delle decine di M è uguale a quella di 3^M.
Quanto vale $f(365)$?

23. [**Gara Tor Vergata 2016**] Roberto e Ciro, hanno deciso di contendersi i (magri!) finanziamenti statali sfidandosi a **Brucia e Spezza**.
Le regole del gioco sono le seguenti:

(**a**) si comincia mettendo sul tavolo 3 bastoni, ciascuno di lunghezza intera strettamente positiva;

(**b**) a turno, ciascun giocatore butta nel fuoco due dei 3 bastoni che sono sul tavolo e spezza il rimanente in 3 pezzi di lunghezza intera e strettamente positiva, che rimette sul tavolo;

(**c**) perde chi non ha più mosse da poter fare, cosa che accade non appena i 3 pezzi sul tavolo hanno tutti lunghezza minore o uguale a 2.

Ad un certo punto ci sono sul tavolo 3 bastoni che misurano 2016, 2017 e 2018 ed è il turno di Ciro, il quale si rende conto di poter forzare la vittoria.
Quante sono le possibili mosse che gli permettono di farlo?

24. Determinare tutte le coppie (x, y) di numeri naturali tali che

$$2^x + 3x^2 = y^2$$

Fornire come risultato la somma di tutte le x e le y delle coppie trovate. (se la somma fosse maggiore di 9999 indicare come risposta 9999.