Roma, 22 Febbraio 2019

Stage Olimpico Urbi et Orbi

Modulo n.8 - gara a tema: Somme Notevoli

I parte: problemi standard

1. Calcolare $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 121$.

2. Trovare la somma dei primi 70 numeri dispari.

3. Calcolare la somma di tutti gli interi non negativi che non superano 400 ed aventi la cifra delle unità uguale a 1.

4. [**Disfida Urbi et Orbi 2016**] Un bastone lungo 2016 millimetri viene spezzato in 63 pezzi più piccoli, le cui lunghezze sono in progressione aritmetica. Se la più grande è 63 volte la più piccola, quanto misura (in millimetri) la più grande?

5. Calcolare la somma di tutti i numeri del tipo $2^\alpha \cdot 3^\beta$, dove α e β sono interi non negativi tali che $\alpha + \beta = 11$. (Se la somma cercata ha più di 4 cifre indicare come risposta le 4 cifre più basse)

6. Una piramide costruita con i cubetti è costituita da 25 strati quadrati. Lo strato alla base ha il lato di 25 cubetti. Quello immediatamente sopra ha il lato di 24 cubetti, e cos\`ı via fino al venticinquesimo strato che è costituito da un cubetto solo. Quanti cubetti sono serviti per costruire la piramide?

7. Trovare la somma $\mathcal{S}$ dei cubi dei primi 20 numeri dispari. Dare come risposta $\dfrac{\mathcal{S}}{100}$.

8. Il piccolo Luca gioca a fare delle piramidi con i cubetti. La figura mostra come è fatta la piramide alta 4 cubetti.

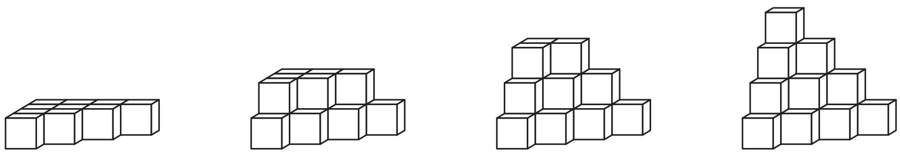

figura 1

Quanti cubetti gli servono per costruire una piramide alta 100 cubetti? (Dare come risposta le 4 cifre più basse del risultato, cioè migliaia, centinaia, decine ed unità)

9. Sia $\mathcal{P}$ l'insieme di tutte le coppie di interi positivi (n, m) tali che $n + m = 24$. Calcolare la somma di tutti i prodotti $n \cdot m$, al variare di (n, m) in $\mathcal{P}$.

10. Quanto vale la somma delle aree di tutti i diversi rettangoli aventi lati interi e perimetro uguale a 60? (Due rettangoli vanno considerati uguali, e quindi presi in considerazione una sola volta, se esiste un movimento rigido che li sovrappone)

11. Sia $\dfrac{m}{n}$ la frazione, ridotta ai minimi termini, che si ottiene calcolando la somma:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{99 \cdot 100}.$$

Quanto vale $n \cdot m$?

12. [**Disfida Urbi et Orbi 2014**] Dire che coefficiente si ottiene per x^{11} dopo aver svolto i prodotti e sommato i termini simili nella seguente espressione:

$$\left(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + 2014x^{2013}\right)^9 .$$

Se il risultato fosse maggiore di 9999 dare come risposta le quattro cifre più basse: migliaia, centinaia, decine e unità.

II parte: altri problemi

13. [**Gara Tor Vergata 2012**] Sia $\mathcal{S}$ la somma di tutti i numeri di 3 cifre aventi la cifra delle decine uguale a 3. Quanto vale $\dfrac{\mathcal{S}}{9}$?

14. [**Summer School Assisi 2018**] Indicato con T_n l'$n-$esimo numero triangolare (cioè $T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$), dire quali sono le ultime 4 cifre del numero $\displaystyle\sum_{n=1}^{50} T_n T_{51-n}$

15. Indichiamo con T_n l'n-esimo numero triangolare (cioè $T_n = 1 + 2 + \ldots + n$).
Inoltre sia $\mathcal{T}$ l'insieme di tutte le terne di interi positivi (n, m, k) tali che $n + m + k = 10$. Calcolare la somma di tutti i prodotti $T_n \cdot T_m \cdot T_k$, al variare di (n, m, k) in $\mathcal{T}$.

16. Sia $\mathcal{Q}$ l'insieme di tutte le quaterne di interi positivi (n, m, k, h) tali che $n+m+k+h = 12$. Calcolare la somma di tutti i prodotti $n \cdot m \cdot k \cdot h$, al variare di (n, m, k, h) in $\mathcal{Q}$.

17. Calcolare la somma di tutti i numeri del tipo $2^\alpha \cdot \beta$, dove α e β sono interi non negativi tali che $\alpha + \beta = 19$. (Se la somma cercata ha più di 4 cifre indicare come risposta le 4 cifre più basse)

18. Detto T_n l'$n-$esimo numero triangolare, cioè $T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$, calcolare:

$$\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_1 + T_2} + \frac{1}{T_1 + T_2 + T_3} + \ldots + \frac{1}{T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_{20}}$$

Il risultato è una frazione che, ridotta ai minimi termini, sarà della forma $\dfrac{m}{n}$. Dare come risposta $m + n$.

19. Calcolare la somma di tutti i numeri del tipo $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$, dove α, β e γ sono interi non negativi tali che $\alpha + \beta + \gamma = 4$.

20. Calcolare:

$$100^2 + 99^2 \cdot 3 + 98^2 \cdot 3^2 + 97^2 \cdot 3^3 + \ldots\ldots + (100-k)^2 \cdot 3^k + \ldots\ldots + 2^2 \cdot 3^{98} + 1^2 \cdot 3^{99}.$$

Se il risultato ha più di 4 cifre, dare come risposta solo le 4 cifre più basse, cioè migliaia, centinaia, decine ed unità.

21. Dire con quanti zeri termina il risultato della somma:

$$\binom{100}{0} \cdot \binom{100}{50} + \binom{100}{1} \cdot \binom{100}{49} + \binom{100}{2} \cdot \binom{100}{48} + \ldots + \binom{100}{49} \cdot \binom{100}{1} + \binom{100}{50} \cdot \binom{100}{0}$$

22. [**Disfida Urbi et Orbi 2014**] Trovare il risultato della somma:

$$\binom{4}{4} + \binom{6}{4} + \binom{8}{4} + \binom{10}{4} + \ldots + \binom{202}{4} + \binom{204}{4}.$$

Se il risultato è maggiore di 9999 indicare come risposta le 4 cifre più basse, cioè migliaia, centinaia, decine e unità.

23. Per ogni $5-$upla $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ di interi non negativi tali che $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 8$ si consideri il prodotto

$$\binom{n_1+2}{2} \cdot \binom{n_2+3}{3} \cdot \binom{n_3+5}{5} \cdot \binom{n_4+7}{7} \cdot \binom{n_5+11}{11}$$

Detta S la somma di tutti questi prodotti, dire quali sono le 4 cifre di ordine più basso di S?

24. [**Disfida Urbi et Orbi 2018**] Sia $\mathcal{S}$ l'insieme degli interi positivi la cui scrittura in base 3 ha al massimo 2018 cifre e contiene solo zeri e uni. Determinare il minimo intero k che non viene superato dalla somma:

$$720 \cdot \sum_{n \in \mathcal{S}} \frac{3n+2}{n(3n+1)}.$$