Roma, 4 Marzo 2019
Stage Olimpico Urbi et Orbi
Modulo n.9 - gara a tema: **Disuguaglianze - Medie - Max e Min**

I parte: problemi standard

1. Se tre numeri positivi sono tali che $xyz = 8000$, qual è il minimo valore che può assumere la loro somma?

2. La somma di 4 numeri positivi è 30. Qual è il massimo valore M che può avere il loro prodotto? (se M non è intero dare come risposta la sua parte intera).

3. La somma di 4 numeri interi positivi è 30. Qual è il massimo valore M che può avere il loro prodotto?

4. Due numeri positivi x e y sono tali che $x + 2y = 12$. Qual è il massimo valore che può assumere il loro prodotto?

5. Sapendo che $xyzw = 27000$ e che x, y, z e w sono positivi, dire qual è il minimo valore che può avere $3x + 2y + 5z + w$.

6. La somma di 3 numeri positivi x, y e z è 24. Qual è il massimo valore assunto dal prodotto x^2yz?

7. [**Summer School Assisi 2018**] Sapendo che $x + y + z + w = 12$ e che x, y, z e w sono positivi, dire qual è il massimo valore che può avere $\sqrt{xyz^2w^4}$.

8. Quanto vale al massimo l'espressione xy^2z^2 calcolata sui punti della sfera di centro l'origine e raggio $\sqrt{20}$?

9. Sapendo che 3 numeri reali positivi x, y e z soddisfano la condizione $xyz = 250$, trovare il minimo valore che può avere l'espressione $xy + xz + 2yz$.

10. Trovare il minimo della funzione $f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + \ldots + (x-39)^2$.

11. Quanti sono gli interi n, sia positivi che negativi, che soddisfano la disuguaglianza $\sqrt{n - \sqrt{900-n}} > 30$?

12. Sia $(a_1, a_2, \ldots, a_{30})$ una permutazione dei numeri interi da 1 a 30. Dire qual è il minimo valore che può assumere l'espressione $a_1 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_4 + a_5 \cdot a_6 + \ldots + a_{29} \cdot a_{30}$.

II parte: altri problemi

13. [**Gara Tor Vergata 2010**] Sia $\mathcal{C}$ un cubo con lo spigolo che misura 1 metro e sia $\mathcal{P}$ un parallelepipedo rettangolo tale che la somma dei suoi spigoli sia uguale a quella di $\mathcal{C}$. Inoltre la misura degli spigoli di $\mathcal{P}$, espressa in centimetri, è intera. Qual è, espresso in cm^3, il minimo valore strettamente positivo che può assumere la differenza tra i volumi dei due solidi?

14. Quanti sono i possibili valori interi positivi che può assumere il volume di un parallelepipedo rettangolo che ha la superficie totale uguale a 156?

15. Dei 10 numeri a_0, a_1, ... , a_9 sappiamo solo che sono strettamente compresi tra 0 e $\frac{1}{2}$. Trovare il minimo valore assunto dall'espressione:

$$(a_0 + a_1 + \ldots + a_9) \cdot \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_9} \right)$$

16. [**Gara Tor Vergata 2013**] Qual è il più grande numero intero che si può scrivere come prodotto di numeri interi positivi la cui somma sia 22?

17. [**Summer School Assisi 2018**] Tre numeri reali a, b e c sono tali che

$$a + b + c = 5 \ , \quad ab + bc + ac = 3.$$

Quanto vale al massimo la parte intera di $100a$?

18. [**Disfida Urbi et Orbi 2011**] Per quanti numeri interi non negativi n è possibile trovare x, y e z reali e non negativi tali che $x + y + z = 87$ e $2xy + 2xz + 2yz = n^2$.

19. [**Gara Tor Vergata 2012**] Trovare n intero positivo in modo che per ogni quaterna di numeri reali (x, y, z, w), non tutti nulli, si abbia:

$$\frac{x^{35}y^{15}z^{24}w^n}{x^{84} + y^{180} + z^{120} + w^{440}} \leq 2012$$

(Se non ce ne fosse alcuno o se ce ne fosse più di uno, indicare come risposta 0).

20. [**Gara Tor Vergata 2009**] In un triangolo i 3 lati misurano rispettivamente $\frac{13}{2}\sqrt[3]{195}$, $7\sqrt[3]{195}$ e $\frac{15}{2}\sqrt[3]{195}$. Per ogni suo punto interno P indichiamo con M_P il prodotto delle 3 distanze di P dai lati del triangolo.
Qual è, al variare di P all'interno del triangolo, il massimo valore che può assumere M_P?

21. Sia data la seguente successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} X_{n+1} = \dfrac{2X_nY_n}{X_n+Y_n} \\ Y_{n+1} = \dfrac{X_n+Y_n}{2} \\ X_0 = 121 \\ Y_0 = 1296 \end{cases}$$

Determinare il più piccolo intero K tale che $X_n \leq K$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

22. [**Gara Tor Vergata 2015**] Trovare qual è il minimo valore che può assumere la somma di 90 numeri reali positivi x_1, x_2, x_3, ... x_{90}, sapendo che:

$$\frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{x_2} + \frac{3^2}{x_3} + \ldots + \frac{90^2}{x_{90}} = 4225.$$

23. Sia V il minimo valore dell'espressione $|x| + |x-1| + 2 \cdot |x-2| + 4 \cdot |x-3| + \ldots + 2^{k-1} \cdot |x-k| + \ldots + 2^{19} \cdot |x-20|$, al variare di x su tutti i numeri reali. Dire quanto vale $\frac{V}{825}$.

24. [**Gara Tor Vergata 2010**] Qual è il minimo valore intero positivo di n che rende vera la disuguaglianza

$$a^n b^{12} \leq \left(a^{90} + b^{72}\right) \cdot \left(a^{30} + b^{40}\right)$$

per tutti i valori reali e positivi di a e b tali che $a^2 + b^2 \leq 1$?

Caro Docente, caro Studente,

ti ricordo che puoi aumentare la visibilità dello stage diffondendone sui media i link alla pagina ufficiale e al canale Youtube.
Una maggior visibilità ci aiuterà a trovare le risorse per ripetere lo stage.

Ti ringrazio fin da ora.

Emanuele Callegari

Stage: http://www.problemisvolti.it/StageOlimpiadiMatematica.html

Video Corso: http://www.problemisvolti.it/CorsoBaseOlimpiadiMatematica.html

YouTube: problemisvolti.it