

Roma, 24 Gennaio 2020

Stage/Campionato Urbi et Orbi

Modulo n.5 - gara a tema: Algebra

Nota. I problemi che seguono possono tutti essere risolti utilizzando le nozioni spiegate nelle due lezioni di preparazione alla gara o comunque presenti nei pdf delle lezioni degli anni passati. Quelli della prima parte sono o molto semplici o molto simili a problemi già svolti a lezione. Quelli della seconda parte richiedono in genere un po' di creatività in più.

I parte: problemi standard o molto semplici

1. [Disfida Urbi et Orbi 2015] Trovare il minimo intero $n > 2015$ per il quale esiste un polinomio non costante $p(x)$ tale che $p(p(p(p(x)))) = (p(x^n))^n$.
2. La somma di 4 numeri positivi è 10. Quanto vale, al massimo, il loro prodotto? (dare come risposta la parte intera del risultato)
3. La somma di 4 numeri interi positivi è 10. Quanto vale, al massimo, il loro prodotto?
4. Sia $p(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$. Qual è la somma dei coefficienti del polinomio che si ottiene elevando $p(x)$ alla 5 e sommando tra loro i termini simili?
5. [Summer School Assisi 2018] Quale è il valore minimo assunto dall'espressione $45x + \frac{125}{x}$ al variare di x reale positivo?
6. Del polinomio $p(x)$ sappiamo che ha grado 6 e che l'equazione $p(x) = 0$ ha 6 soluzioni positive il cui prodotto è 720. Qual è il prodotto delle soluzioni dell'equazione $p(x^2) = 0$?
7. Del polinomio $p(x)$ sappiamo che ha grado 10 e che l'equazione $p(x) = 0$ ha 10 soluzioni positive la cui somma è 144. Qual è la somma dei quadrati delle soluzioni dell'equazione $p(x^2) = 0$?
8. Siano x, y e z tre numeri positivi tali che $x + y + z = \frac{2}{25}$. Qual è il minimo valore assunto dall'espressione $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{z}$.
9. Siano x, y e z tre numeri reali e positivi tali che $x + y + z = 3$ e sia $\frac{m}{n}$ la frazione, ridotta ai minimi termini, che rappresenta il massimo valore che può assumere $x^6 y^4 z^2$.
Quanto vale $m + n$?
10. [Summer School Assisi 2018] Del polinomio $Q(x)$ sappiamo che è della forma
$$Q(x) = x^8 + 12x^7 + 76x^6 + \text{termini di grado inferiore}$$
e che è stato ottenuto calcolando $p(p(p(x)))$ a partire da un altro polinomio $p(x)$ che non si conosce.
Trovare la somma dei coefficienti di $Q(x)$.
11. Sia $p(x) = 29x^3 - 31x^2 + 10x - 1$ e siano x_1, x_2 ed x_3 le sue radici.
Calcolare $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}$.
12. Il resto della divisione $(x^{73} + 5x^{37} - 8x^{20} + 7x + 18) : (x^2 + x + 1)$ è un polinomio del tipo $ax + b$. Quanto vale $|ab|$?

II parte: altri problemi

13. [Summer School Assisi 2019] Indicate con a, b, c le radici del polinomio $x^3 - x - 1$, quanto vale $\frac{a+1}{a-1} + \frac{b+1}{b-1} + \frac{c+1}{c-1}$?
14. [Gara Tor Vergata 2015] Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali tale che $p(p(x)) = (p(x))^{2016} + 2015$. Quanto vale $p(49)$? (se $p(x)$ non esiste o se $p(49)$ non è univocamente determinato dare come risposta 0; se $p(49)$ è univocamente determinato ma è maggiore di 9999, indicare come risposta le quattro cifre più basse, cioè migliaia, centinaia, decine e unità.)
15. Se si scompone il polinomio $x^6 + 12x^3$ nel prodotto di polinomi a coefficienti interi non ulteriormente scomponibili si ottiene che è il prodotto di 3 polinomi $p_1(x), p_2(x)$ e $p_3(x)$. Sia s_1 la somma dei coefficienti di $p_1(x)$, s_2 quella di $p_2(x)$ ed s_3 quella di $p_3(x)$.
Quanto vale $s_1 + s_2 + s_3$?
16. Del polinomio $p(x)$ sappiamo che per ogni intero positivo pari n soddisfa $p(n) = \frac{n-1}{n+5} \cdot p(n+2)$ e che inoltre $p(2) = 30$. Quanto vale $p(7)$?
17. Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione:

$$\sqrt{128(14-x)(1+x)^3} \geq 13x^2 - 4x + 208$$

Qual è il più grande tra i valori contenuti in S ? (se il risultato non fosse intero dare come risposta la sua parte intera)

18. Dati $p(x) = x^5 + 4x^4 + 12x^3 + 19x^2 + 21x + 15$ e $q(x) = x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 9x + 10$, sia $m(x)$ il polinomio monico (cioè col termine di grado massimo che ha coefficiente 1) che ha grado minimo tra tutti quelli divisibili sia per $p(x)$ che per $q(x)$. Quanto vale la somma dei coefficienti di $m(x)$?

19. Tre numeri positivi x, y e z sono tali che $xyz = 100$. Qual è il minimo valore che può assumere l'espressione $(x + y)(1 + z)$?

20. [Gara Tor Vergata 2017] Sia $p(x)$ un polinomio del tipo $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tale che l'equazione $p(x) = -4$ ha 3 soluzioni intere distinte aventi somma 2. Se inoltre esiste n intero positivo tale che $p(n) = 2017$, dire quanto vale n . (Se si ritiene che una tale n non possa esistere dare come risposta 0, se invece le informazioni non bastano a identificare n in modo univoco, indicare come risposta 9999)

21. [Gara Tor Vergata 2019] Trovare la somma delle soluzioni reali dell'equazione:

$$x^6 + 661x^4 - 2019x^3 - 661x^2 - 1 = 0$$

22. [Disfida Urbi et Orbi 2019] Sull'isola Kenoncè il concorso per essere ammessi alla Scuola Dei Più Bravi è composto da due prove (matematica e fisica) in ciascuna delle quali si può conseguire un voto che varia da 0 a 10, non necessariamente intero. Al concorso di quest'anno hanno partecipato 8 persone: per tre di essi la media aritmetica dei due voti è 8, per altri tre la media è 6 mentre per i due rimanenti la media è 5. La commissione però si accorge che i voti sono tali che, usando la media quadratica invece della media aritmetica non ci sarebbero studenti a pari merito. In base ai soli dati noti, quante sono le possibili classifiche diverse che si potrebbero ottenere usando la media quadratica? (N.B. la media quadratica di a e b è $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$)

23. [Disfida Urbi et Orbi 2019] Siano $a, b, c \geq 0$ tali che $ab + bc + ca = 27$. Trovare il minimo della espressione

$$(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)$$

24. Trovare il più piccolo n intero positivo per il quale si abbia:

$$\frac{a^3 b^7 c^n}{(a^{210} + b^{210} + c^{3003})(a^{210} + b^{3003} + c^{210})(a^{3003} + b^{210} + c^{210})} \leq 2020$$

per ogni terna di numeri reali (a, b, c) tali che $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ e $0 < c < 1$.

A gara finita ...

Potrai trovare tutto il materiale didattico dello stage (lezioni, testi gare, risultati) linkato alla pagina:

<http://www.problemisvolti.it/ZStageMateriale.html>

Info Campionato Urbi et Orbi

Le squadre iscritte al Campionato Urbi et Orbi devono partecipare a questa gara con lo stesso nome con cui si sono registrate al Campionato, in modo che a fine gara io possa aggiornare correttamente la classifica.

Le squadre non iscritte al Campionato sono invitate a NON usare come nomi di squadra quelli già presenti in classifica.

La classifica aggiornata del Campionato è linkata alla pagina dello stage:

<http://www.problemisvolti.it/StageOlimpiadiMatematica.html>
