

CAMPIONATO URBI et ORBI

11-12-2020

GARA n.2 - ALGEBRA

SOLUZIONI

PROB. 1 QUESTIONE DI GRADO (I)

RISP: 125

DETTO n IL GRADO DI $P(x)$, IL GRADO DI

$Q(x) = P(P(P(x)))$ SARÀ n^3 . QUINDI

IL GRADO DI $Q(x)$ È 125 PERCHÉ È L'UNICO CUBO TRA 100 E 200.

PROB. 2 TAGLIA LA CORDA (I)

RISP: 5832

SICCOME I CASI SONO IN NUMERO FINITO, IL MASSIMO C'È SICURAMENTE. MOSTRIAMO CHE SI OTTIENE QUANDO LE LUNGHEZZE SONO: 9, 9, 9 E 8.

PER DIMOSTRARLO BASTA NOTARE CHE, SE 2 DEI 4 PEZZI DI CORDA HANNO MISURE a E b CON

$a - b \geq 2$ ALLORA C'È UNA CONFIGURAZIONE DI 4 PEZZI CON PRODOTTO PIÙ GRANDE. INFATTI SE AD

a E b SI SOSTITUISCE $a-1$ E $b+1$ LA SOMMA RESTA COSTANTE MA IL PRODOTTO AUMENTA PERCHÉ:

$$(a-1) \cdot (b+1) = ab + (a-b-1) \geq ab + 1 > ab$$

PERCHÉ $a - b \geq 2$

PAG. 1

QUINDI, SE IL PRODOTTO È MASSIMO, LE LUNGHEZZE DI TUTTI I PEZZI DIFFERISCONO TRA LORO AL MASSIMO DI 1.

L'UNICA CONFIGURAZIONE CON TALE PROPRIETÀ È:

9, 9, 9, 8.

CHE QUINDI È QUELLA CHE MASSIMIZZA IL PRODOTTO.

PROB. 3

TAGLIA LA CORDA (II)

RISP: 5861

DETTE a, b, c E d LE 4 LUNGHEZZE, SI HA:

$$abcd = \left(\sqrt[4]{abcd} \right)^4 \leq$$

DISUG. TRA MEDIA GEOM.
E MEDIA ARITH.

CON "="
CHE VALE
SE E SOLO SE
 $a=b=c=d$

$$\leq \left(\frac{a+b+c+d}{4} \right)^4 =$$

$$= \left(\frac{35}{4} \right)^4 = \left(9 - \frac{1}{4} \right)^4 =$$

$$= 9^4 - 4 \cdot 9^3 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot 9^2 \cdot \frac{1}{4^2} - 4 \cdot 9 \cdot \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} =$$

$$= 9^4 - 9^3 + (6 \cdot 9^2 - 9) \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{256} =$$

$$= 9^3 \cdot 8 + 29 + \frac{13}{16} + \frac{1}{256} = 5861 + \frac{13}{16} + \frac{1}{256}$$

$$\begin{aligned} (6 \cdot 9^2 - 9) \cdot \frac{1}{16} &= \\ &= \frac{6 \cdot 80 - 3}{16} = \\ &= 30 - \frac{3}{16} = \\ &= 29 + \frac{13}{16} \end{aligned}$$

QUINDI IL MAX. VALORE INTERO DEL PRODOTTO È 5861

PROB. 4MISSIONE SU MARTE**RISP: 588**

IN UN GIORNO LUCA MANGIA $\frac{1}{924}$ DEL CIBO

E SAMANTHA $\frac{1}{1617}$.

QUINDI INSIEME NE MANGIANO:

$$\frac{1}{924} + \frac{1}{1617} = \frac{1617 + 924}{924 \cdot 1617} = \dots = \frac{1}{588}$$

QUINDI TERMINERANNO IL CIBO IN 588 GIORNI.

PROB. 5GITA A GRASSOPOLI**RISP: 173**

INDICHIAMO CON M, P, F I PESI DI MAMMA, PAPÀ E FIGLIOLO, RISPETTIVAMENTE. SAPPIAMO CHE:

$$M + P = 132 \quad P + F = 115 \quad M + F < 100$$

DI CONSEGUENZA:

$$(M + P) + (P + F) + (M + F) < 132 + 115 + 100$$

CIOÈ:

$$2M + 2P + 2F < 347$$

CIOÈ:

$$M + P + F < 173,5$$

QUINDI IL MASSIMO VALORE INTERO È 173 E PUÒ ESSERE EFFETTIVAMENTE OTTENUTO CON:

$$F = 41, M = 58 \text{ E } P = 44$$

PROB. 6SUPERSIMMETRIE**RISP: 2866**

$$\begin{cases} xy + x + y = 13 \\ x^2y + xy^2 = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy + x + y = 13 \\ xy(x+y) = 40 \end{cases}$$

PONGO $S = x+y$
 $P = xy$

$$\begin{cases} P+S=13 \\ P \cdot S=40 \end{cases} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{cases} P=8 \\ S=5 \end{cases} \mapsto \begin{cases} xy=8 \\ x+y=5 \end{cases} \begin{matrix} \boxed{\text{NO}} \\ \boxed{\text{RADICI}} \\ \boxed{\text{REALI}} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} P=5 \\ S=8 \end{cases} \mapsto \begin{cases} xy=5 \\ x+y=8 \end{cases} \begin{matrix} \boxed{\text{SI}} \\ \boxed{\text{RADICI}} \\ \boxed{\text{REALI}} \end{matrix}$$

QUINDI:

$$x^4 + y^4 = (x+y)^4 - 4x^3y - 4xy^3 - 6x^2y^2 =$$

$$= (x+y)^4 - 4xy(x^2+y^2) - 6x^2y^2 =$$

$$= (x+y)^4 - 4xy((x+y)^2 - 2xy) - 6(xy)^2 =$$

$$= 8^4 - 4 \cdot 5 (8^2 - 2 \cdot 5) - 6 \cdot 5^2 =$$

$$= 4096 - 20 \cdot 54 - 150 = 2866.$$

PROB. 7VIVA LA DIFFERENZA! (I)**RISP: 11**

CERCHIAMO α TALE CHE SIA α SIA $\alpha+1$ SIANO SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE, QUINDI DEVE ESSERE:

$$\alpha^3 - 91\alpha + 330 = 0 \quad \text{E} \quad (\alpha+1)^3 - 91(\alpha+1) + 330 = 0.$$

SOTTRAENDO LA PRIMA DALLA SECONDA, SI OTTIENE:

$$3\alpha^2 + 3\alpha + 1 - 91 = 0$$

CIOÈ:

$$\alpha^2 + \alpha - 30 = 0$$

LE CUI SOLUZIONI SONO $\alpha = 5$ E $\alpha = -6$.

DI QUESTE PERÒ SOLO $\alpha = 5$ RISOLVE ANCHE L'EQUAZIONE DI PARTENZA, QUINDI LE DUE SOLUZIONI CERCATE SONO $\alpha = 5$ E $\alpha+1 = 6$, LA CUI SOMMA È 11.

PROB. 8PERSONAL COMPUTER**RISP: 9**

OGNI GIORNO SI POSSONO SOMMARE AL MASSIMO 80 COPPIE DI NUMERI COSICCHÉ, NELL'INSIEME DEI NUMERI DA SOMMARE, OGNI COPPIA È SOSTITUITA DALLA LORO SOMMA. IN TAL MODO LA QUANTITÀ DI NUMERI DA SOMMARE DIMINUISCE DI:

- 80 SE I NUMERI RIMASTI SONO ALMENO 160.
- $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ SE I NUMERI RIMASTI SONO $n < 160$.

QUINDI LA SEQUENZA DI NUMERI CHE, GIORNO DOPO GIORNO, RESTANO DA SOMMARE È LA SEGUENTE:

$$230 \rightarrow 150 \rightarrow 75 \rightarrow 38 \rightarrow 19 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

QUINDI IN 9 GIORNI SI ARRIVA A UN SOLO NUMERO, CHE È LA SOMMA.

PROB. 9 SOMMARE SENZA SOMMARE (I) **RISP: 422**

SE α , β E γ SONO LE 3 RADICI SAPPIAMO CHE

$$\alpha + \beta + \gamma = 24 \quad \text{E} \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = 77.$$

QUINDI:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma) = \\ &= 24^2 - 2 \cdot 77 = 422 \end{aligned}$$

PERÒ NON ABBIAMO FINITO PERCHÉ LE FORMULE CHE ABBIAMO USATO TENGONO CONTO DI TUTTE LE RADICI, ANCHE EVENTUALI RADICI COMPLESSE. QUINDI, PER MOSTRARE CHE IL VALORE CERCATO È QUELLO RICHIESTO, BISOGNA MOSTRARE CHE TUTTE LE RADICI SONO REALI.

A TALE SCOPO, POSTO $P(x) = x^3 - 24x^2 + 77x + 294$, SI OSSERVI CHE:

- $P(0) = 294$
- $P(10) = 1000 - 2400 + 770 + 294 = -336$

DAL FATTO CHE $P(x)$ CAMBIA SEGNO SULL'INTERVALLO $[0, 10]$ SEGUE CHE $P(x)$ SI ANNULLA ALMENO IN UN PUNTO DI $[0, 10]$, CIOÈ CHE $P(x) = 0$ HA UNA RADICE IN $[0, 10]$. INOLTRE, POICHÉ IL TERMINE DI GRADO PIÙ ALTO È x^3 , QUANDO $|x|$ È MOLTO GRANDE $P(x)$ HA LO STESSO SEGNO DI x .

QUINDI $P(x)$ CAMBIA SEGNO ANCHE SULLE SEMIRETTE $(-\infty, 0]$ E $[10, +\infty)$, PERCIÒ SU ENTRAMBE C'È UNA SOLUZIONE DI $P(x)=0$. QUESTO DIMOSTRA CHE LE RADICI REALI SONO ALMENO TRE E PERCIÒ α , β E γ SONO TUTTE REALI.

PROB. 10

QUESTIONE DI GRADO(II)

RISP: 18

SI OSSERVI CHE SE IL TERMINE DI GRADO MINIMO DI $P(x)$ HA GRADO m , ALLORA IL TERMINE DI GRADO MINIMO DI $Q(x) = P(P(P(x)))$ HA GRADO m^3 .

MA SICCOME SAPPIAMO CHE x^9 DIVIDE $Q(x)$, BISOGNA CHE $m^3 \geq 9$, QUINDI IL MINIMO VALORE INTERO ACCETTABILE È $m=3$, DA CUI SEGUE $m^3 = 27$.

QUINDI $Q(x)$ È DIVISIBILE PER x^{27} , QUINDI x^{9+k} VA BENE PER $k=18$.

PROB. 11

MAL DI CALCOLI

RISP: 4096

NOTIAMO CHE, PER OGNI $x \neq 0, 1, \frac{1}{2}$ SI HA:

$$g(x) = \frac{1}{2-2x}$$

$$g(g(x)) = \frac{1}{2 - 2 \cdot \frac{1}{2-2x}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{x-1}} = \frac{x-1}{2x-1}$$

$$g(g(g(x))) = \frac{\frac{1}{2-2x} - 1}{2 \cdot \frac{1}{2-2x} - 1} = \frac{1 - 2 + 2x}{2 - 2 + 2x} = \frac{2x - 1}{2x} = 1 - \frac{1}{2x}$$

$$g(g(g(g(x)))) = 1 - \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2-2x}} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{1-x}} = 1 - 1 + x = x$$

DA CIÒ SEGUE CHE, PER OGNI $n \geq 1$, SI HA:

$$A_{n+4} = g(g(g(g(A_n)))) = A_n$$

DI CONSEGUENZA:

$$\begin{aligned} A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{24} &= (A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4)^6 = \\ (*) \quad &= (A_1 \cdot g(A_1) \cdot g(g(A_1)) \cdot g(g(g(A_1))))^6 \end{aligned}$$

MA PER OGNI $x \neq 0, 1, \frac{1}{2}$ SI HA:

$$\begin{aligned} x \cdot g(x) \cdot g(g(x)) \cdot g(g(g(x))) &= \\ &= x \cdot \frac{1}{2-2x} \cdot \frac{x-1}{2x-1} \cdot \frac{2x-1}{2x} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

QUINDI DA (*) SEGUE:

$$\frac{1}{A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{24}} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{4}\right)^6} = 4^6 = 4096$$

PROB. 12

GROSSO COEFFICIENTE CERCASI

RISP: 4200

IL TERMINE GENERICO DELLO SVILUPPO È:

$$\frac{10!}{n! \cdot m! \cdot k!} x^n y^m z^k$$

CON $n+m+k=10$, QUINDI IL COEFFICIENTE È MASSIMO SE $n! \cdot m! \cdot k!$ È MINIMO.

A TALE SCOPO OSSERVIAMO CHE SE a E b SONO INTERI NON NEGATIVI TALI CHE $a-b \geq 2$, ALLORA:

$$a! \cdot b! > (a-1)! \cdot (b+1)!$$

INFATTI:

$$\begin{aligned} a! \cdot b! - (a-1)! \cdot (b+1)! &= \\ &= (a-1)! \cdot b! \cdot (a - (b+1)) \geq \\ &\geq (a-1)! \cdot b! \geq 1! \cdot 0! > 0 \end{aligned}$$

DI CONSEGUENZA $n! \cdot m! \cdot k!$ È MINIMO SOLO SE n, m E k DIFFERISCONO TRA LORO AL MASSIMO DI 1, MA SICCOME LA SOMMA È 10, È FORZATO CHE 2 DI ESSI VALGONO 3 E UNO VALE 4. QUINDI IL VALORE MASSIMO PER I COEFFICIENTI È:

$$\frac{10!}{3! \cdot 3! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot \overset{3}{9} \cdot \overset{4}{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 4200$$

PROB. 13SOMMARE SENZA SOMMARE (II)**RISP: 110**PRIMA TROVIAMO A OSSERVANDO CHE PER $x = -1$ SI HA:

$$(-1+1) \cdot P(-1) = 1-2+3-4+5-6 \dots +19-20 + A$$

DA CUI SEGUE:

$$0 = -10 + A$$

CIOE' $A = 10$. QUINDI OTTIENIAMO CHE:

$$(x+1) \cdot P(x) = x^{20} + 2x^{19} + 3x^{18} + \dots + 20x + 10$$

CHE PER $x = 1$ DIVENTA:

$$2 \cdot P(1) = 1+2+3+\dots+20+10$$

DA CUI SEGUE:

$$P(1) = 110$$

SI NOTI CHE SE:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

ALLORA:

$$P(1) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 =$$

 $=$ SOMMA DEI COEFFICIENTI

QUINDI LA SOMMA DEI COEFFICIENTI E' 110

PROB. 14**TAGLIA LA CORDA (III)****RISP: 4294**

VOGLIAMO MOSTRARE CHE UNA CONFIGURAZIONE DI PEZZI CHE MASSIMIZZA IL PRODOTTO È QUELLA COSTITUITA DA 11 PEZZI DA 3 METRI E 1 PEZZO DA 2 METRI.

PREMESSO CHE UNA CONFIGURAZIONE CHE MASSIMIZZA IL PRODOTTO ESISTE SENZ'ALTRO, PERCHÉ I CASI SONO IN NUMERO FINITO, CONVENIAMO NEL SEGUITO DI INDICARLA CON Γ .

VALGONO LE SEGUENTI OSSERVAZIONI:

OSS. 1 Γ NON CONTIENE PEZZI PIÙ LUNGI DI 4 METRI

DIMO SE CI FOSSE UN PEZZO LUNGO $n \geq 5$, SI POTREBBE AUMENTARE IL PRODOTTO TAGLIANDOLO IN 2 PEZZI LUNGI 2 E $n-2$ PERCHÉ:

$$2 \cdot (n-2) = 2n-4 = n + (n-4) \geq n+1 > n$$

OSS. 2 Γ NON CONTIENE PEZZI LUNGI 1 METRO

DIMO INFATTI RIATTACCANDO IL PEZZO LUNGO 1 AD UNO QUALSIASI DEGLI ALTRI IL PRODOTTO AUMENTA.

OSS. 3 Γ NON CONTIENE PIÙ DI UN PEZZO LUNGO 4 METRI

DIMO INFATTI SE CE NE FOSSERO DUE DA 4 IL PRODOTTO AUMENTA SOSTITUENDOLI CON DUE DA 3 E UNO DA 2.

OSS.4 π NON CONTIENE PIÙ DI DUE PEZZI LUNGHI 2 METRI

DIMO INFATTI SE CE NE FOSSERO TRE BASTEREBBE SOSTITUIRLI CON DUE PEZZI DA 3 E IL PRODOTTO AUMENTEREBBE.

OSS.5 π NON PUÒ CONTENERE SIA UN PEZZO DA 4 METRI CHE UNO DA 2 METRI

DIMO INFATTI SE CI FOSSERO ENTRAMBI SI POTREBBE AUMENTARE IL PRODOTTO SOSTITUENDOLI CON DUE PEZZI DA 3 METRI

CONCLUSIONE

π PUÒ QUINDI ESSERE DI 4 TIPI:

- 1) TUTTI I PEZZI SONO LUNGHI 3
- 2) UN PEZZO È LUNGO 4 E TUTTI GLI ALTRI 3
- 3) UN PEZZO È LUNGO 2 E TUTTI GLI ALTRI 3
- 4) DUE PEZZI SONO LUNGHI 2 E TUTTI GLI ALTRI 3

MA SICCOME $35 \equiv 2 \pmod{3}$ SOLO IL CASO (3) È POSSIBILE: 11 PEZZI DA 3 E 1 PEZZO DA 2. QUINDI IL MASSIMO VALORE DEL PRODOTTO È:

$$3^{11} \cdot 2 = 354294$$

PROB. 15

MASSIMO IL MASSIMIZZATORE

RISP: 160

PREMETTIAMO IL:

LEMMA DATI GLI INTERI POSITIVI α, β, a E b TALI CHE

$$(1) \quad \alpha\beta = ab$$

$$(2) \quad \alpha < a < b < \beta$$

ALLORA $\alpha! \cdot \beta! > a! \cdot b!$.

DIMO DA (1) SEGUE CHE:

$$a:\alpha = \beta:b$$

E QUINDI CHE:

$$(a-\alpha):\alpha = (\beta-b):\beta$$

DA CUI, GRAZIE A (2), SEGUE CHE

$$(3) \quad a-\alpha < \beta-b$$

OSSERVIAMO ORA CHE DIMOSTRARE $\alpha! \cdot \beta! > a! \cdot b!$
EQUIVALE A DIMOSTRARE:

$$(4) \quad \underbrace{\beta \cdot (\beta-1) \cdot \dots \cdot (b+2) \cdot (b+1)}_{(\beta-b) \text{ FATTORI}} > \underbrace{a \cdot (a-1) \cdot \dots \cdot (a+2) \cdot (a+1)}_{(a-\alpha) \text{ FATTORI}}$$

MA LA (4) È OVVIA PERCHÉ I FATTORI AL PRIMO MEMBRO SONO DI PIÙ, GRAZIE A (3), E SONO PIÙ GROSSI, GRAZIE A (2).

GRAZIE AL LEMMA MOSTREREMO ORA CHE I 5 NUMERI DIVERSI TALI CHE IL PRODOTTO È 3600 E IL PRODOTTO DEI FATTORIALI È MASSIMO SONO QUELLI DELL'INSIEME:

$$(5) \quad \Gamma = \{1, 2, 3, 4, 150\}$$

OSSERVIAMO CHE UN INSIEME CHE REALIZZA IL MASSIMO ESISTE SENZ'ALTRO, PERCHÉ IL NUMERO

DEI CASI È FINITO, QUINDI PER MOSTRARE CHE VA BENE (5) BASTA MOSTRARE CHE OGNI ALTRO INSIEME VA MALE.

PRENDIAMO QUINDI:

$$(6) \quad \Lambda = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\}$$

TALE CHE:

$$(7) \quad n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 = 3600$$

(8) GLI n_i SONO TUTTI INTERI DISTINTI

$$(9) \quad \Lambda \neq \Gamma$$

SI NOTI CHE DA (7) E (9) SEGUE CHE:

$$\{1, 2, 3, 4\} \not\subseteq \Lambda$$

QUINDI POSSIAMO DEFINIRE:

$$\alpha = \min \{k \in \{1, 2, 3, 4\} \mid k \notin \Lambda\}.$$

DOPODICHÉ PRENDIAMO DUE ELEMENTI a E b DISTINTI

DI Λ IN MODO CHE $b = \max(\Lambda)$ E a SODDISFI:

$$(10) \quad \alpha < a < b$$

$$(11) \quad \alpha \text{ DIVIDE } a \cdot b$$

SI NOTI CHE, QUALSIASI SIA $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$, È SEMPRE POSSIBILE PRENDERE a E b IN MODO CHE VALGANO (10) E (11) PERCHÉ:

- SE $\alpha = 1$ (10) E (11) SONO OVVIE.

- SE $\alpha = 2$ GLI ELEMENTI DI Λ MAGGIORI DI α SONO 4 E, GRAZIE A (7), ALMENO UNO DI ESSI È PARI.

- SE $\alpha = 3$ GLI ELEMENTI DI Λ MAGGIORI DI α SONO 3
E, GRAZIE A (7), ALMENO UNO DI ESSI È MULTIPLO DI 3.
- SE $\alpha = 4$ GLI ELEMENTI DI Λ MAGGIORI DI α SONO 2
E, GRAZIE A (7), IL LORO PRODOTTO È 600.

ASSODATO CHE POSSIAMO PRENDERE a E b IN Λ IN MODO
CHE VALGANO (10) E (11), DEFINIAMO:

$$\beta = \frac{a \cdot b}{\alpha}$$

GRAZIE A (11) β È INTERO E GRAZIE A (10) SI HA $\beta > b$.
POSSIAMO QUINDI APPLICARE IL LEMMA E DIRE CHE:

$$(12) \quad \alpha! \cdot \beta! > \alpha! \cdot b!$$

QUINDI, SE NELL'INSIEME Λ SOSTITUIAMO
 a E b CON α E β , OTTENIEMO UN NUOVO INSIEME Λ'
DI 5 INTERI DISTINTI IL CUI PRODOTTO È ANCORA 3600
MA CON IL PRODOTTO DEI FATTORIALI CHE È AUMENTATO
GRAZIE A (12).

QUESTO DIMOSTRA CHE Λ NON PUÒ ESSERE L'INSIEME
CHE MASSIMIZZA IL PRODOTTO DEI FATTORIALI.

MA VISTO CHE QUESTO ACCADE SEMPRE SE $\Lambda \neq \Gamma$,
ALLORA L'UNICO CHE MASSIMIZZA È $\Gamma = \{1, 2, 3, 4, 150\}$.

QUINDI LA RISPOSTA RICHIESTA È $1+2+3+4+150$, CIOÈ 160.

PROB 16

VIVA LA DIFFERENZA (II)

RISP: 30

PER IPOTESI SAPPIAMO CHE ESISTE UNA SOLUZIONE α
TALE CHE ANCHE $\alpha+1$ È SOLUZIONE.

QUINDI α E A SODDISFANO:

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha^3 - 10\alpha^2 + 19\alpha + A = 0 \\ (\alpha+1)^3 - 10(\alpha+1)^2 + 19(\alpha+1) + A = 0 \end{cases}$$

SOTTRAENDO LA PRIMA ALLA SECONDA SI OTTIENE:

$$3\alpha^2 + 3\alpha + 1 - 20\alpha - 10 + 19 = 0$$

CIOÈ:

$$3\alpha^2 - 17\alpha + 10 = 0$$

LE CUI SOLUZIONI SONO $\alpha=5$ E $\alpha=\frac{2}{3}$.

QUINDI LE SOLUZIONI DI (1) SONO:

$$\begin{cases} \alpha=5 \\ A=30 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha=\frac{2}{3} \\ A=-\frac{914}{27} \end{cases}$$

MA PER IPOTESI A È INTERO QUINDI LA RISPOSTA
È $A=30$.

CI SONO 2 CASI: (1) POLINOMIO COSTANTE
(2) POLINOMIO NON COSTANTE

CASO (1) SE $P(x) = \text{COSTANTE} = \lambda$ ALLORA LA
CONDIZIONE:

$$(1) \quad P(P(x)) = \frac{(P(x))^3 - 2}{3}$$

DIVENTA:

$$\lambda = \frac{\lambda^3 - 2}{3}$$

CIOÈ:

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

CIOÈ:

$$(\lambda + 1)^2(\lambda - 2) = 0$$

LE CUI SOLUZIONI SONO $\lambda = -1$ E $\lambda = 2$.

QUINDI I POLINOMI COSTANTI CHE SODDISFANO (1)

SONO DUE: $P(x) = -1$ E $P(x) = 2$.

CASO (2) SE $P(x)$ NON È COSTANTE ALLORA

I DIVERSI VALORI CHE ASSUME SONO INFINITI,
QUINDI, SE NELLA (1) PONGO $y = P(x)$, AVRÒ
CHE PER INFINITI VALORI DI y SI HA:

$$(2) \quad P(y) = \frac{y^3 - 2}{3}$$

QUINDI, PER IL PRINCIPIO DI IDENTITÀ DEI POLINOMI, L'UNICO $P(x)$ CHE SODDISFA (2) È PROPRIO:

$$P(x) = \frac{x^3 - 2}{3}$$

QUINDI, IN TUTTO, I POLINOMI RICHIESTI SONO TRE: DUE COSTANTI E UNO DI TERZO GRADO.

PROB. 18 NON È LA SCUOLA **RISP: 117**

CONVIENE COMINCIARE DALLA II DISEQUAZIONE:

$$(1) \quad x^{22} + x^{11} + 1331x > 11\sqrt{x^2 - x - 56}.$$

UNA VOLTA TOLTI GLI x CHE RENDONO NEGATIVO $x^2 - x - 56$, CIOÈ GLI $x \in (-7, 8)$, TUTTI GLI ALTRI VANNO BENE PER (1). INFATTI SE $x \in (-\infty, -7] \cup [8, +\infty)$ SI HA:

$$-x^{11} - 1331x + 11\sqrt{x^2 - x - 56} \leq$$

$$\leq |x|^{11} + 1331 \cdot |x| + 11\sqrt{(x-8)(x+7)} \leq$$

$$\leq |x|^{11} + 1331 \cdot |x| + 11\sqrt{3|x| \cdot 2|x|} <$$

$$< |x|^{11} + 1331 \cdot |x| + 33 \cdot |x| = |x|^{11} + 1364|x| <$$

$$< 2|x|^{11} < |x|^{22} = x^{22}$$

$$|x-8| \leq 3|x|$$

$$|x+7| \leq 2|x|$$

PER $|x| \geq 7$

QUINDI LA SOLUZIONE DI (1) È $(-\infty, -7] \cup [8, +\infty)$

SE ORA CONSIDERIAMO ANCHE LA I DISEQUAZIONE:

$$(2) \quad x^3 + 5x^2 - 11x + 1 > 0$$

SCOPRIAMO CHE GLI $x \geq 8$ VANNO TUTTI BENE
MENTRE GLI $x \leq -7$ VANNO TUTTI MALE.

INFATTI PER $x \geq 8$ SI HA:

$$\begin{aligned} x^3 + 5x^2 - 11x + 1 &> 64x + 40x - 11x + 1 = \\ &= 93x + 1 > 0 \end{aligned}$$

MENTRE PER $x \leq -7$ SI HA:

$$\begin{aligned} x^3 + 5x^2 - 11x + 1 &\leq -7 \cdot x^2 + 5x^2 - 11x + 1 = \\ &= -2x^2 - 11x + 1 = \\ &= x(-2x - 11) + 1 \leq \\ &\leq -7(-2x - 11) + 1 \leq \\ &\leq -7 \cdot 3 + 1 = -20 < 0 \end{aligned}$$

QUINDI L'INSIEME DELLE SOLUZIONI COMUNI ALLA PRIME
DUE DISEQUAZIONI E $[8, +\infty)$. PER RISOLVERE IL SISTEMA
BASTA STABILIRE QUALI DI ESSE VANNO BENE ANCHE PER LA
TERZA, CIOE' PER:

$$(3) \quad \sqrt{6 - \sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt{5 - \sqrt[3]{x}}} > \frac{20}{x+2}$$

PERCHE' LA (3) ABBA SENSU TOGLIERE TUTTI GLI $x \geq 125$.

MOSTRIAMO ORA CHE TUTTI GLI x RIMASTI, CIOÈ
GLI $x \in [8, 125]$, SODDISFANO (3).
INFATTI, PERTALI x , SI HA:

$$\text{II MEMBRO DI (3)} = \frac{20}{x+2} \leq \frac{20}{8+2} = 2$$

$$\text{I}^\circ \text{ MEMBRO DI (3)} = \sqrt{6 - \sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt{5 - \sqrt[3]{x}}} >$$

PERCHÉ SE $y > 0$ SI HA:

$$y + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{y} - 2 + 2 =$$

$$= \left(\sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right)^2 + 2 \geq 2$$

$$> \sqrt{5 - \sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt{5 - \sqrt[3]{x}}} \geq 2$$

QUINDI LA SOLUZIONE DEL SISTEMA È $[8, 125]$,
LA CUI LUNGHEZZA È 117.

PROB 19 TAGLIA LA CORDA (IV) **RISP: 0320**

VOGLIAMO MOSTRARE CHE IL PRODOTTO È MASSIMO
SE LE MISURE DEI PEZZI SONO I NUMERI DELL'INSIEME

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

E QUINDI CHE IL MASSIMO VALORE DEL PRODOTTO È:

$$(1) \quad 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$

OSSERVIAMO CHE SE I PEZZI DI CORDA FOSSERO 6
IL PRODOTTO È SICURAMENTE MINORE DI (1)

PAG 20

PERCHÉ:

$$\text{MAX} \{ a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_6 \mid a_1 + \dots + a_6 = 35, \text{ TUTTI DIVERSI} \leq \\ \text{E INTERI POSITIVI}$$

PERCHÉ SI FA IL
MAX SU UN
INSIEME PIÙ
GRANDE

$$\leq \text{MAX} \{ a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_6 \mid a_1 + a_2 + \dots + a_6 = 35 \} \leq \\ \text{INTERI POSITIVI}$$

RAGIONANDO
COME NEL
PROB. 2

$$\leq 6^5 \cdot 5 = 38880 < 40320.$$

ANALOGAMENTE (ANZI, A MAGGIOR RAGIONE) IL PRODOTTO È MINORE DI (1) SE I PEZZI SONO MENO DI 6.

QUINDI, PER MASSIMIZZARE IL PRODOTTO I PEZZI DEVONO ESSERE ALMENO 7. MA SICCOME DEVONO ESSERE DISTINTI NON POSSONO ESSERE 8 O PIÙ DI 8, ALTRIMENTI LA LORO SOMMA SAREBBE:

$$n_1 + n_2 + \dots + n_8 + \dots + n_k \geq n_1 + n_2 + \dots + n_8 \geq 1 + 2 + \dots + 8 = 36 > 35.$$

QUINDI I PEZZI DI CORDA SONO ESATTAMENTE 7.

OSSERVIAMO INFINE CHE QUANDO IL PRODOTTO È MASSIMO NON CI POSSONO ESSERE PEZZI DI CORDA LUNGI 1, ALTRIMENTI SI POTREBBE AUMENTARE IL PRODOTTO ATTACANDO IL PEZZO DI LUNGHEZZA 1 A QUELLO DI LUNGHEZZA MASSIMA.

A QUESTO PUNTO POSSIAMO CONCLUDERE PERCHÉ L'UNICO MODO DI SCRIVERE 35 COME SOMMA DI 7 INTERI DISTINTI MAGGIORI DI 1 È:

$$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 35$$

QUINDI IL MASSIMO (CHE C'È DI SICURO PERCHÉ L'INSIEME DEI VALORI È FINITO) È PROPRIO QUELLO DATO DA (1).

PROB. 20

SEMPRE IN MEZZO

RISP: 8068

OSSERVIAMO CHE m E n MINIMIZZANTI LA SOMMA SONO NECESSARIAMENTE PRIMI TRA LORO.

INOLTRE DEVE ESSERE $m < n$ PERCHÉ $\frac{m}{n} < \frac{2017}{2018} < 1$.

LA CONDIZIONE:

$$\frac{2016}{2017} < \frac{m}{n} < \frac{2017}{2018}$$

EQUIVALE A:

$$1 - \frac{1}{2017} < 1 - \frac{n-m}{n} < 1 - \frac{1}{2018}$$

CIOÈ A:

$$(1) \quad \frac{1}{2018} < \frac{n-m}{n} < \frac{1}{2017}$$

SE $n-m=1$ NON C'È ALCUN VALORE DI n CHE SODDISFA (1).

SE INVECE $n-m=2$ LA (1) DIVENTA

$$\frac{1}{2 \cdot 2018} < \frac{1}{n} < \frac{1}{2 \cdot 2017}$$

LA CUI UNICA SOLUZIONE INTERA È $n = 2017 + 2018 = 4035$,
DA CUI SEGUE $m = n - 2 = 4033$ E QUINDI $n + m = 8068$.

SE INVECE $n-m=k \geq 3$ I VALORI DI n CHE SODDISFANO (1)
SONO TUTTI TALI CHE $n \geq k \cdot 2017$ E QUINDI:

$$n + m \geq 2k \cdot 2017 - k = 4033 \cdot k > 8068$$

QUINDI IL VALORE MINIMO DI $n+m$ È QUELLO CHE SI OTTIENE
PER $n-m=2$, CIOÈ 8068.

PROB. 21TAGLIA LA CORDA (II)**RISP: 13**

DALLA DISUGUAGLIANZA TRA MEDIA ARITMETICA E GEOMETRICA SEGUE CHE, FISSATO IL NUMERO DI PEZZI n IN CUI VIENE TAGLIATA LA CORDA, IL PRODOTTO È MASSIMO QUANDO TUTTI I PEZZI SONO UGUALI.

BASTA DUNQUE TROVARE n IN MODO CHE $\left(\frac{35}{n}\right)^n$ SIA MASSIMO. PRESA LA FUNZIONE $f(x) = \left(\frac{35}{x}\right)^x$ SI HA:

$$f'(x) = \left(\frac{35}{x}\right)^x \cdot \left(x \cdot (\ln 35 - \ln x)\right)' = \left(\frac{35}{x}\right)^x \cdot (-1 + \ln 35 - \ln x) = \left(\frac{35}{x}\right)^x \cdot \ln \frac{35}{e \cdot x}$$

DA CUI SEGUE CHE $f(x)$ CRESCE SU $(0, \frac{35}{e})$ E DECRESCHE SU $(\frac{35}{e}, +\infty)$.

MA ALLORA, SICCOME $12 < \frac{35}{e} < 13$, IL MASSIMO PER $\left(\frac{35}{n}\right)^n$ SI OTTIENE PER $n=12$ O PER $n=13$. PER MOSTRARE, SENZA CALCOLATRICE, CHE IL VALORE GIUSTO È $n=13$, ANZICHÈ MOSTRARE CHE $\left(\frac{35}{13}\right)^{13} > \left(\frac{35}{12}\right)^{12}$ È PIÙ COMODO MOSTRARE CHE:

$$13 \cdot \left(\frac{13}{12}\right)^{12} < 35$$

USANDO SVILUPPO
DEL BINOMIO

INFATTI SI HA:

$$13 \cdot \left(\frac{13}{12}\right)^{12} = 13 \cdot \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = \dots = 33 + (\text{QUANTITÀ MINORE DI 1})$$

QUINDI IL VALORE MASSIMO SI OTTIENE PER $n=13$.

PROB. 22PENSIERI CONTORTI**RISP. 96**LEMMA 1

ESISTONO INFINITI VALORI INTERI POSITIVI DI m PER I QUALI

$$\sqrt{m} - \lfloor \sqrt{m} \rfloor = 0$$

DIMO

OVVIA: BASTA CHE m SIA UN QUADRATO PERFETTO.

LEMMA 2 PER QUANTO PICCOLO SIA $\varepsilon > 0$ ESISTONO INFINITI VALORI INTERI POSITIVI DI m PER I QUALI $\sqrt{m} - \lfloor \sqrt{m} \rfloor > 1 - \varepsilon$.

DIMO PRESO m DELLA FORMA $m = k^2 - 1$ CON k INTERO POSITIVO SI HA:

$$\begin{aligned}\sqrt{m} - \lfloor \sqrt{m} \rfloor &= \sqrt{k^2 - 1} - (k-1) = 1 - (k - \sqrt{k^2 - 1}) = \\ &= 1 - \frac{k^2 - k^2 + 1}{k + \sqrt{k^2 - 1}} = 1 - \frac{1}{k + \sqrt{k^2 - 1}}\end{aligned}$$

BASTA QUINDI CHE k SIA ABBASTANZA GRANDE, AD ESEMPIO

$$k > 1 + \frac{1}{\varepsilon}, \text{ PERCHÉ SIA } \sqrt{m} - \lfloor \sqrt{m} \rfloor > 1 - \varepsilon.$$

QUINDI GLI m INTERI POSITIVI CHE SODDISFANO $\sqrt{m} - \lfloor \sqrt{m} \rfloor > 1 - \varepsilon$ SONO INFINITI.

LEMMA 3 VALE SEMPRE $\sqrt{m} - \lfloor \sqrt{m} \rfloor < 1$.

DIMO OVVIA.

SIAMO ORA IN GRADO DI DIMOSTRARE CHE L'UNICO C CHE VA BENE È $C = 96$. QUESTO SARÀ CONSEGUENZA DI 2 PROPOSIZIONI:

PROPOSIZIONE 1 NON C'È ALCUN k TALE CHE LA DISUGUGLIANZA

$$71 + 42 \cdot (\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor) < C + 17 \cdot (\sqrt{k} - \lfloor \sqrt{k} \rfloor)$$

VALGA PER OGNI n , SE E SOLO SE $C \leq 96$.

DIMO SE $C > 96$ ESISTONO, GRAZIE AL LEMMA 2, VALORI DI k TALI CHE II MEMBRO > 113 , MENTRE, PER IL LEMMA 3, SI HA I MEMBRO < 113 PER OGNI n . QUESTO DIMOSTRA IL "SOLO SE". SE INVECE $C \leq 96$, GRAZIE AL LEMMA 3, PER OGNI k SI HA II MEMBRO $= C_k < 113$ QUINDI GRAZIE AL LEMMA 2 C'È SEMPRE QUALCHE n TALE CHE I MEMBRO $> C_k$.

PROPOSIZIONE 2 PER OGNI n ESISTONO INFINITI k TALI CHE

$$41 + 42 \cdot (\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor) < C + 17 \cdot (\sqrt{k} - \lfloor \sqrt{k} \rfloor)$$

SE E SOLO SE $C \geq 96$.

DIMO SE $C < 96$, GRAZIE AL LEMMA 3, SI HA $\text{I MEMBRO} < C + 17 < 113$.
 QUINDI, GRAZIE AL LEMMA 2, ESISTE n TALE CHE $\text{I MEMBRO} > \text{II MEMBRO}$.
 PER OGNI k . QUESTO DIMOSTRA IL "SOLO SE".

INVECE, SE $C \geq 96$, SICCOME GRAZIE AL LEMMA 3, PER OGNI n
 SI HA $\text{I MEMBRO} = C_n < 113$, GRAZIE AL LEMMA 2 CI SONO
 INFINITI k TALI CHE $\text{II MEMBRO} > C_n$.

PROB. 23

MASSIMO IL MINIMIZZATORE

RISP. 648

ABBIAMO:

$$(x + y^2 + z^3) \cdot (w^2 + 6) =$$

$$= \left(\underbrace{\frac{x}{6} + \dots + \frac{x}{6}}_6 + \frac{y^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^3}{2} + \frac{z^3}{2} \right) \cdot \left(\frac{w^2}{3} + \frac{w^2}{3} + \frac{w^2}{3} + \underbrace{\frac{3}{4} + \dots + \frac{3}{4}}_8 \right) \geq$$

$$\geq 11 \cdot \sqrt[11]{\left(\frac{x}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{y^2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{z^3}{2}\right)^2} \cdot 11 \cdot \sqrt[11]{\left(\frac{w^2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^8} =$$

$$= 121 \cdot \sqrt[11]{\frac{x^6 \cdot y^6 \cdot z^6 \cdot w^6 \cdot 3^8}{6^6 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^8}} =$$

$$= 121 \cdot \sqrt[11]{\frac{(xyzw)^6}{3^6 \cdot 2^{24}}} =$$

$$= 121 \cdot \sqrt[11]{\frac{(18^6)^6}{3^6 \cdot 2^{24}}} = 121 \cdot \sqrt[11]{3^{66}} = 121 \cdot 81 = 9801.$$

VALE "=" SE E SOLO SE:

$$\frac{w^2}{3} = \frac{3}{4} \text{ E } \frac{x}{6} = \frac{y^2}{3} = \frac{z^3}{2}$$

PERCHÉ $xyzw = 18^4$

SICCOME IL MINIMO SI OTTIENE QUANDO VALE L'UGUAGLIANZA,
SI HA SE E SOLO SE:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{w^2}{3} = \frac{3}{4} \\ \frac{x}{8} = \frac{y^2}{3} \\ \frac{x}{6} = \frac{z^3}{2} \\ xyzw = 18^4 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} w^2 = \frac{9}{4} \\ \frac{x}{2} = y^2 \\ \frac{x}{3} = z^3 \\ x^6 \cdot y^6 \cdot z^6 \cdot w^6 = 18^{24} \end{array} \right.$$

SOSTITUENDO NELL'ULTIMA EQUAZIONE SI HA:

$$x^6 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^3 = 18^{24}$$

CIOÈ:

$$x^{11} = 18^{24} \cdot \frac{4^3}{9^3} \cdot 2^3 \cdot 3^2 = 2^{33} \cdot 9^{22} = (8 \cdot 81)^{11}$$

DA CUI SEGUE $x = 8 \cdot 81 = 648$.

PROB. 24

TAGLIA LA CORDA (THE GAME)

RISP. 272

MOSTREREMO 2 AFFERMAZIONI:

PROPOSIZIONE 1: COMUNQUE GIOCHI CLAUDIA, LUCA PUÒ FARE IN MODO CHE
IL PRODOTTO DEI 4 PEZZI FINALI NON SUPERI 272.

PROPOSIZIONE 2: COMUNQUE GIOCHI LUCA, CLAUDIA PUÒ FARE IN MODO CHE IL
PRODOTTO DEI 4 PEZZI FINALI NON SIA INFERIORE A 272.

DIMOSTRATO CIÒ AVREMO VINTO: SE ENTRAMBI GIOCANO AL MEGLIO, IL PRODOTTO
FINALE SARÀ 272.

DIMO.1

LUCA TAGLIA 2 VOLTE QUINDI PUÒ SEMPRE FARE
IN MODO CHE 2 DEI 4 PEZZI FINALI ABBIANO LUNGHEZZA 1,
NEL QUAL CASO LA SOMMA DEI 2 PEZZI RIMANENTI È 33
E QUINDI IL LORO PRODOTTO È MASSIMO QUANDO LA DIFFERENZA
È MINIMA, CIOÈ QUANDO UNO È 16 E L'ALTRO 17.
QUINDI IL MASSIMO DEL PRODOTTO È $1 \cdot 1 \cdot 16 \cdot 17 = 272$.

PRIMA DI DIMOSTRARE LA PROPOSIZIONE 2 FACCIAMO UN'OSSERVAZIONE:

OSS.1

SE 2 PEZZI DI CORDA HANNO LUNGHEZZE a E b
INTERE E TALI CHE $1 < a \leq b$, ALLORA IL PRODOTTO
DIMINUISCE SE AL POSTO DI a E b PRENDO $a-1$ E $b+1$.
INFATTI: $(a-1)(b+1) = ab - b + a - 1 \leq ab - 1 < ab$.

PASSIAMO QUINDI A:

DIMO 2

QUALSIASI SIA LA PRIMA MOSSA DI LUCA, CLAUDIA
SI RITROVA SUL TAVOLO 2 PEZZI DI LUNGHEZZE
 A E B , CON $1 \leq A \leq 17 < B \leq 34$. DI CONSEGUENZA,
TAGLIANDO B , CLAUDIA PUÒ FAR SÌ CHE DOPO LA SUA
MOSSA TUTTI I PEZZI ABBIANO LUNGHEZZE NON MAGGIORI
DI 17. QUINDI, QUALSIASI SIA LA MOSSA DI LUCA,
ANCHE I 4 PEZZI FINALI SONO TUTTI NON MAGGIORI DI 17.
CIO' BASTA PER POTER DIRE CHE IL LORO PRODOTTO VALE
ALMENO 272.

PIÙ PRECISAMENTE, DOPO AVER DEFINITO:

$$\mathcal{J} = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \text{ INTERI TALI CHE } a+b+c+d=35 \text{ E } 1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 17\}$$

MOSTRIAMO CHE:

$$\min \{a \cdot b \cdot c \cdot d \mid (a, b, c, d) \in \mathcal{J}\} = 272$$

LA DIMOSTRAZIONE È SEMPLICE: TALE MINIMO ESISTE

SENZ'ALTRO PERCHÉ $\mathcal{Z}$ È FINITA.

MA TALE MINIMO NON SI PUÒ OTTENERE DA $(a, b, c, d) \in \mathcal{Z}$

SE a E b NON SONO ENTRAMBI UGUALI A 1.

INFATTI SE PRENDO LA QUATERNA DI NUMERI $(a, b-1, c+1, d)$,
EVENTUALMENTE RIORDINATA IN ORDINE CRESCENTE, SI HA:

1) $a \cdot b \cdot c \cdot d > a \cdot (b-1) \cdot (c+1) \cdot d$ (GRAZIE ALL'OSS.1)

2) $(a, b-1, c+1, d) \in \mathcal{Z}$ (PERCHÉ LA SOMMA È ANCORA 35
E $c+1 \leq 17$. QUEST'ULTIMA COSA
È VERA PERCHÉ, IN REALTÀ $c \leq 16$
IN QUANTO, SE $(a, b, c, d) \in \mathcal{Z}$, SOLO
 d PUÒ ESSERE 17)

CIÒ SIGNIFICA CHE SE a E b NON SONO ENTRAMBI UGUALI A 1,
C'È SEMPRE IN $\mathcal{Z}$ UNA QUATERNA DI NUMERI IL CUI PRODOTTO
È MINORE DI QUELLO DI (a, b, c, d) .

MA ALLORA, SICCOME IL MINIMO DEL PRODOTTO ESISTE, SI DEVE
OTTENERE QUANDO $a=b=1$. MA L'UNICA QUATERNA DI $\mathcal{Z}$
TALE CHE $a=b=1$ È $(1, 1, 16, 17)$, QUINDI IL MINIMO
CERCATO È $1 \cdot 1 \cdot 16 \cdot 17$, CIOÈ 272.