Roma, 5 Febbraio 2021

Campionato Urbi et Orbi - Gara di Aritmetica

A cura di: E. Callegari, S. Campagna, S. Claudi, P. De Falco, S. Pieri, M. Sabatini.

I parte: problemi standard o comunque semplici

1. [**Sponsorizzato**] In un problema de IL LIBRO si ricava la formula dei numeri di Catalan. Il numero del problema è uguale al numero dei divisori di 81920^2. Di che numero si tratta?

2. [**Sponsorizzato**] In un problema de IL LIBRO si affronta, in un caso particolare, il problema del conteggio di funzioni monotone definite su insiemi parzialmente ordinati. Il numero del problema è uguale al più grande numero primo che divide 118877. Di che numero si tratta?

3. [**MCD e mcm (I)**] Calcolare $\text{MCD}(2064^2, 2021^2)$.

4. [**MCD e mcm (II)**] Calcolare $\text{mcm}(38683, 37673)$. Dare come risposta le ultime 4 cifre del risultato: migliaia, centinaia, decine e unità.

5. [**Sponsorizzato**] IL LIBRO riporta lo svolgimento di n problemi, dove n è il più piccolo numero di tre cifre che divide 102030201. Quanti sono i problemi?

6. [**Contare i divisori (I)**] Dire quanti interi positivi sono multipli di 100! e divisori di 105!.

7. [**MCD e mcm (III)**] Quante coppie (m, n) di interi positivi soddisfano $\text{MCD}(m, n) = 210$ e $\text{mcm}(m, n) = 30030^2$?

8. [**Differenza di quadrati (I)**] Trovare tutte le coppie di interi positivi (x, y) tali che $x^2-y^2 = 1001$. Dare come risposta la somma delle y di tutte le coppie trovate.

9. [**MCD e mcm (IV)**] I tre interi positivi a, b e c sono tali che $\text{MCD}(a, b) = 90$, $\text{MCD}(a, c) = 300$, $\text{MCD}(b, c) = 30$ e $\text{mcm}(a, b, c) = 9000$. Qual è la somma di tutti i possibili valori di c?

10. [**I divisori come insieme ordinato (I)**] Sia $\mathcal{D}$ l'insieme di tutti i divisori di 10000. Quanti sono i sottoinsiemi $\mathcal{H}$ di $\mathcal{D}$, costituiti da due elementi tali che uno dei due divide l'altro?

11. [**Differenza di quadrati (II)**] Quanti divisori di 14400 si possono scrivere come differenza di due quadrati?

II parte: altri problemi

12. [**Sponsorizzato**] In un problema de IL LIBRO si dimostra la formula per contare le funzioni suriettive. Il numero del problema ha 5832 come prodotto dei divisori. Di che numero si tratta?

13. [**Sponsorizzato**] In un problema de IL LIBRO si utilizza per la soluzione l'idea di orbita di un elemento. Il numero del problema è il minimo intero $n \geq 2$ che ha n^{35} come prodotto dei divisori del suo quadrato. Di che numero si tratta?

14. [**Differenza di quadrati (III)**] Quanti sono, nel piano cartesiano, i punti di coordinate intere positive che appartengono all'iperbole $x^2 - y^2 = 60^{15}$?

15. [**I divisori come insieme ordinato (II)**] Sia $\mathcal{D}$ l'insieme di tutti i divisori di 10000. Dire quanti sono i sottoinsiemi $\mathcal{H}$ di $\mathcal{D}$ con almeno due elementi e aventi la seguente proprietà: *comunque si prendano due elementi di $\mathcal{H}$, nessuno dei due divide l'altro.*

16. [**Invertire il prodotto (I)**] Quanti sono gli interi n, con $1 \le n \le 10000$, tali che esistono due interi positivi distinti m_1 ed m_2 aventi entrambi il prodotto dei divisori uguale ad n.

17. [**Differenza di quadrati (IV)**] Prese tutte le coppie di interi positivi (x, y) tali che $x^2 - y^2 = 105^7$, che sono molte, trovare la somma di tutte loro x. Dare come risposta le ultime 4 cifre del numero trovato (migliaia, centinaia, decine e unità).

18. [**Invertire il prodotto (II)**] Tra tutti i divisori di 30^{35} quanti sono quelli che si possono ottenere come prodotto dei divisori di un opportuno numero?

19. [**Differenza di quadrati (V)**] Diremo che un intero n è **buono** se si può scrivere **esattamente** in due modi come differenza di due quadrati perfetti. Ad esempio 24 è buono perché si può scrivere in due modi ($24 = 7^2 - 5^2 = 5^2 - 1^2$) mentre 6 e 64 non lo sono visto che 64 si può scrivere in tre modi ($64 = 8^2 - 0^2 = 10^2 - 6^2 = 17^2 - 15^2$) e 6 in nessuno.
Quanti sono gli n buoni che sono pari e tali che $2 \le n \le 500$?

20. [**Mattoncini**] Un parallelepipedo rettangolo di legno, di dimensioni $150 \times 90 \times 60$ viene tagliato lungo piani paralleli alle facce in modo da ottenere tanti mattoncini di legno tutti uguali tra loro, con gli spigoli di lunghezza intera. Quanti diversi tipi di mattoncini si possono ottenere alla fine, considerando anche il caso limite in cui si operano zero tagli? (Due mattoncini vanno considerati dello stesso tipo se esiste un movimento rigido che li sovrappone, ad esempio un mattoncino $5 \times 2 \times 30$ e uno $2 \times 5 \times 30$ sono dello stesso tipo)

21. [**I divisori come insieme ordinato (III)**] Sia $\mathcal{D}$ l'insieme di tutti i divisori di 10000. Dire quanti sono i sottoinsiemi $\mathcal{H}$ di $\mathcal{D}$ con almeno due elementi e aventi la seguente proprietà: *comunque si prendano due elementi di $\mathcal{H}$, uno dei due divide sempre l'altro.* (Dare come risposta le quattro cifre più basse del risultato: migliaia, centinaia, decine e unità)

A gara finita ...

Soluzioni e commenti ai problemi e classifica saranno linkati alla pagina:

`http://www.problemisvolti.it/ZStageCalendario.html`

Risposte dei Problemi

Problema 1	:	87
Problema 2	:	107
Problema 3	:	1849
Problema 4	:	8759
Problema 5	:	111
Problema 6	:	960
Problema 7	:	64
Problema 8	:	640
Problema 9	:	5400
Problema 10	:	200
Problema 11	:	54
Problema 12	:	18
Problema 13	:	72
Problema 14	:	3712
Problema 15	:	226
Problema 16	:	0
Problema 17	:	2000
Problema 18	:	78
Problema 19	:	45
Problema 20	:	1000
Problema 21	:	0246

Svolgimenti dei problemi

Negli svolgimenti riportati qui di seguito vengono utilizzate spesso osservazioni e formule che, pur essendo ben note ai partecipanti più esperti, potrebbero essere ignote ai principianti.
Chi dovesse aver bisogno di approfondire tali argomenti può trovarli spiegati nelle lezioni di Aritmetica Zero del 2018 e del 2019 dello Stage da cui ha avuto origine il Campionato Urbi et Orbi. Si trovano tutte linkate alla pagina:

`http://www.problemisvolti.it/ZStageMateriale.html`

e negli svolgimenti che seguono sono citate come **Lez2018**, **Lez2019A** e **Lez2019B**.

Soluzione del Problema 1.

La risposta corretta è: 87.
Abbiamo

$$81920^2 = (8 \cdot 1024 \cdot 10)^2 = \left(2^3 \cdot 2^{10} \cdot 2 \cdot 5\right)^2 = 2^{28} \cdot 5^2.$$

Quindi i divisori di $n = 81920^2$ sono

$$d(n) = (28+1) \cdot (2+1) = 87.$$

Per la dimostrazione della formula utilizzata vedi pag. 4 di **Lez2018**.

Soluzione del Problema 2.

La risposta corretta è: 107.
Abbiamo

$$\begin{aligned} 118877 &= 11 \cdot 10807 = 11 \cdot (10700 + 107) \\ &= 11 \cdot 107 \cdot (100+1) = 11 \cdot 107 \cdot 101. \end{aligned}$$

Quindi il numero primo cercato è 107.

Soluzione del Problema 3.

La risposta corretta è: 1849.
Con l'algoritmo euclideo si ha

$$\mathrm{MCD}(2064, 2021) = \mathrm{MCD}(2021, 43) = 43$$

visto che 43 divide 2021.
A questo punto:

$$\mathrm{MCD}(2064^2, 2021^2) = 43^2 = 1849.$$

Soluzione del Problema 4.

La risposta corretta è: 8759.
Siccome

$$\text{MCD}(a,b)\cdot\text{mcm}(a,b)=a\cdot b$$

basterà calcolare il MCD. Si ha:

$$\text{MCD}(38683,37673)=\text{MCD}(37673,1010)=\text{MCD}(37673,101)=101,$$

dove la prima uguaglianza segue dall'algoritmo euclideo, la seconda dal fatto che 2 e 5 non dividono 37673 e la terza dal fatto che invece 101 lo divide, visto che

$$37673=3\cdot 10201+6\cdot 101=3\cdot 101^2+70\cdot 101=101\cdot 373.$$

Quindi si ottiene:

$$\text{mcm}(38683,37673)=\frac{38683\cdot 37673}{\text{MCD}(38683,37673)}=\frac{38683\cdot 101\cdot 373}{101}=38683\cdot 373=14428759$$

le cui ultime 4 cifre sono 8759.

Soluzione del Problema 5.

La risposta corretta è: 111.
Posto $a=102030201$, fattorizziamolo:

$$\begin{aligned} a=102030201=10101^2=(10201-100)^2=\\ =\left(101^2-10^2\right)^2=((101+10)\cdot(101-10))^2=\\ =111^2\cdot 91^2=(3\cdot 37)^2\cdot(7\cdot 13)^2=3^2\cdot 7^2\cdot 13^2\cdot 37^2\end{aligned}$$

Di conseguenza 111 divide a.
Inoltre nessun altro numero intero tra 100 e 110 divide a. Infatti quelli pari non vanno bene perché a è dispari, 105 non va bene perché 5 non divide a e infine 101, 103, 107 e 109 non vanno bene perché sono primi e non compaiono nella fattorizzazione di a.
Si può quindi concludere che il più piccolo divisore di tre cifre di a è 111.

Soluzione del Problema 6.

La risposta corretta è: 960.
I multipli di 100! che dividono 105! sono tutti e soli i numeri della forma $K\cdot 100!$ con K divisore di $M=105\cdot 104\cdot 103\cdot 102\cdot 101$. Quindi sono tanti quanti i divisori di M.
Si ha

$$M=105\cdot 104\cdot 103\cdot 102\cdot 101=3\cdot 5\cdot 7\cdot 8\cdot 13\cdot 103\cdot 2\cdot 3\cdot 17\cdot 101=2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 13\cdot 17\cdot 101\cdot 103$$

quindi

$$d(M)=5\cdot 3\cdot 2^6=960.$$

Soluzione del Problema 7.

La risposta corretta è: 64.
Sappiamo che

$$\mathrm{MCD}(m,n) = 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$
$$\mathrm{mcm}(m,n) = 30030^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2$$

Quindi m e n sono della forma:

$$m = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \cdot 7^{a_4} \cdot 11^{a_5} \cdot 13^{a_6}$$
$$n = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3} \cdot 7^{b_4} \cdot 11^{b_5} \cdot 13^{b_6}$$

Ora, i casi per a_1 e b_1 sono due: $a_1 = 1$ e $b_1 = 2$ oppure $a_1 = 2$ e $b_1 = 1$.
Lo stesso vale per ogni altra coppia di esponenti a_i e b_i, quindi i casi sono in tutto 2^6, cioè 64.

Soluzione del Problema 8.

La risposta corretta è: 640.
Riscrivendo la condizione come

$$(x+y)(x-y) = 7 \cdot 11 \cdot 13$$

le possibilità sono quattro:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=1001 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=7 \\ x+y=143 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=11 \\ x+y=91 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=13 \\ x+y=77 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono: $(501, 500)$, $(75, 68)$, $(51, 40)$ e $(45, 32)$.
Quindi la somma delle y di tali coppie è $500 + 68 + 40 + 32 = 640$.

Soluzione del Problema 9.

La risposta corretta è: 5400.
Sappiamo che

(1) $$\mathrm{MCD}(a,b) = 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$
(2) $$\mathrm{MCD}(a,c) = 300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$
(3) $$\mathrm{MCD}(b,c) = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$
(4) $$\mathrm{mcm}(a,b,c) = 9000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3$$

quindi a, b e c sono della forma

$$a = 2^{\alpha} \cdot 3^{A} \cdot 5^{p}$$
$$b = 2^{\beta} \cdot 3^{B} \cdot 5^{q}$$
$$c = 2^{\gamma} \cdot 3^{C} \cdot 5^{r}$$

dove dobbiamo scegliere gli esponenti in modo che valgano $(1) - (4)$.
Cominciamo a trovare A, B e C.

Da (1) segue $A, B \geq 2$ mentre da (4) segue $A, B \leq 2$ quindi possiamo concludere che $A = B = 2$. Questa informazione, combinata con (2) implica $C = 1$, che è compatibile anche con (3).

Troviamo ora α, β e γ.

Da (2) segue $\alpha, \gamma \geq 2$, con l'uguaglianza che vale per almeno una delle due. Questa informazione, combinata con (1) implica $\beta = 1$, che è compatibile anche con (3). Invece da (4) segue $\alpha, \gamma \leq 3$, dove l'uguaglianza vale esattamente per una delle due, grazie a (2) e al fatto che $\beta = 1$. Quindi i casi possibili per (α, β, γ) sono 2: $(2, 1, 3)$ e $(3, 1, 2)$

In modo del tutto analogo si trova che i casi possibili per (p, q, r) sono $(2, 1, 3)$ e $(3, 1, 2)$.

Quindi i possibili valori di c sono $2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^3 = 3000$, $2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^3 = 1500$, $2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 = 600$ e $2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2 = 300$, la cui somma è 5400.

Soluzione del Problema 10.

La risposta corretta è: 200.

Per la soluzione di questo problema (e soprattutto dei problemi **15** e **21**) è comodo immaginare l'insieme $\mathcal{D}$ dei divisori di 10000 come se fosse una tabella.

Più precisamente, visto che gli elementi di $\mathcal{D}$ sono i numeri della forma $2^\alpha \cdot 5^\beta$, con α e β che variano tra 0 e 4, possiamo immaginare di far corrispondere il numero $2^\alpha \cdot 5^\beta$ alla casella di coordinate (α, β) di una tabella 5×5.

Ad esempio, come si può vedere in Figura 1, $500 = 2^2 \cdot 5^3$ corrisponde alla casella colorata di grigio chiaro, mentre $40 = 2^3 \cdot 5^1$ corrisponde alla casella colorata di grigio scuro. Ovviamente $1 = 2^0 \cdot 5^0$ corrisponde alla casella in basso a sinistra mentre $10000 = 2^4 \cdot 5^4$ corrisponde alla casella in alto a destra.

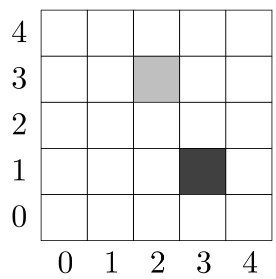

figura 1

L'utilità di immaginare $\mathcal{D}$ come tabella, risiede nel fatto che alcune relazioni algebriche tra gli elementi di $\mathcal{D}$ corrispondono a ben precise relazioni geometriche tra le caselle della tabella.

Vediamo alcuni esempi.

Prendiamo un qualsiasi elemento di $\mathcal{D}$, ad esempio $500 = 2^2 \cdot 5^3$, che corrisponde alla casella colorata di grigio nelle Figure 2, 3 e 4.

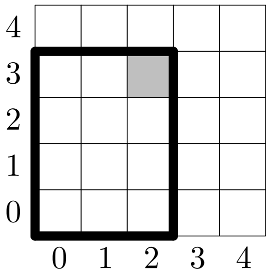

figura 2

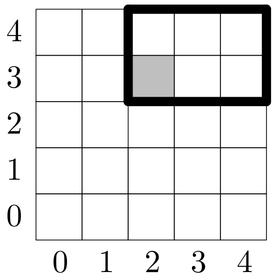

figura 3

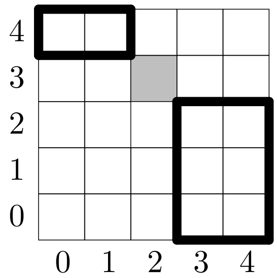

figura 4

L'insieme dei suoi divisori è costituito da tutti e soli gli elementi di $\mathcal{D}$ del tipo $2^\alpha \cdot 5^\beta$ con $\alpha \leq 2$ e $\beta \leq 3$. Le corrispondenti caselle sono quelle del rettangolo bordato di nero in Figura 2. Per comodità di esposizione ci riferiremo a tali caselle dicendo che sono quelle che stanno **a monte** della casella grigia, o anche che la **precedono**.

Ragionando in modo analogo otteniamo che gli elementi di $\mathcal{D}$ di cui 500 è divisore corrispondono alle caselle del rettangolo evidenziato in Figura 3, cioè alle caselle che stanno **a valle** della casella grigia, ovvero che la **seguono**.

Invece gli elementi di $\mathcal{D}$ che non sono né divisori né multipli di 500 corrisponderanno a caselle che non stanno né a monte né a valle della casella grigia ma **di fianco**, che sono quelle dei due rettangoli evidenziati in Figura 4.

Ovviamente quanto esemplificato per 500 vale per ogni altro elemento x di $\mathcal{D}$, in particolare gli elementi di $\mathcal{D}$ che lo dividono corrispondono alle caselle che stanno a monte della casella che corrisponde a x, mentre quelli di cui x è divisore stanno a valle.

Torniamo ora al problema iniziale: contare in quanti modi posso scegliere due elementi distinti di $\mathcal{D}$ in modo che uno dei due divida l'altro.

Ragionando in termini di tabella e caselle, il problema equivale a contare in quanti modi posso scegliere due caselle distinte in modo che una delle due stia a monte dell'altra.

Osserviamo che, comunque si fissino due caselle siffatte, rimane univocamente determinato il rettangolo di cui esse sono caselle di spigolo, come si può vedere in Figura 5 dove le due caselle corrispondono ai numeri $20 = 2^2 \cdot 5^1$ e $1000 = 2^3 \cdot 5^3$.

Questo significa che per risolvere il nostro problema basta contare quanti sono i rettangoli contenenti almeno due caselle.

A tale scopo si noti che ogni rettangolo è univocamente determinato dalle proiezioni dei suoi vertici sui lati della tabella, come si vede in Figura 6.

Ma le due proiezioni sul lato orizzontale possono essere scelte in $\binom{6}{2}$ modi tra i 6 punti possibili. Lo stesso dicasi per quelle sul lato verticale.

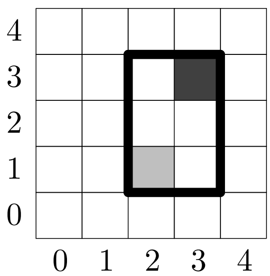

figura 5

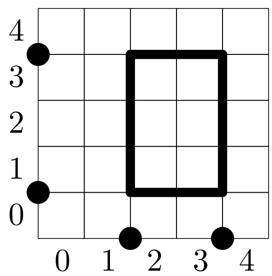

figura 6

I rettangoli non vuoti sono quindi $\binom{6}{2}^2$, ma ad essi vanno tolti i 25 rettangoli fatti di una sola casella.

I rettangoli costituiti da almeno due caselle sono quindi:

$$\binom{6}{2}^2 - 25 = 15^2 - 25 = 200.$$

Soluzione del Problema 11.

La risposta corretta è: 54.
Sappiamo che solo i numeri pari non divisibili per 4 non si possono scrivere come differenza di quadrati.
Abbiamo

$$14400 = 120^2 = (2^3 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

quindi i suoi divisori che si possono scrivere come differenza di quadrati sono quelli del tipo

$$m = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$$

dove $\beta, \gamma = 0, 1, 2$ e $\alpha = 0, \ldots, 6$ ma $\alpha \neq 1$.
Quindi i casi sono in tutto $3 \cdot 3 \cdot 6$, ovvero 54.

Soluzione del Problema 12.

La risposta corretta è: 18.
Sappiamo che la formula per calcolare il prodotto dei divisori di n è:

$$\Pi(n) = n^{\frac{d(n)}{2}} \tag{5}$$

dove $d(n)$ è il numero di divisori di n.
Ma allora, da

$$\Pi(n) = 5832 = 2^3 \cdot 3^6 \tag{6}$$

segue che n deve essere della forma

$$n = 2^\alpha \cdot 3^\beta, \quad \text{con } \alpha : \beta = 3 : 6,$$

cioè della forma

$$n = 2^\alpha \cdot 3^{2\alpha}. \tag{7}$$

Applicando ad n la formula (5) si ottiene la condizione

$$\left(2^\alpha \cdot 3^{2\alpha}\right)^{\frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)}{2}} = 2^3 \cdot 3^6$$

ovvero

$$2^{\frac{\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)}{2}} \cdot 3^{\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)} = 2^3 \cdot 3^6$$

che equivale a

$$\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)=6 \tag{8}$$

che ha come unica soluzione intera positiva $\alpha = 1$.
Quindi l'unico n che soddisfa (6) si ottiene sostituendo $\alpha = 1$ nella (7) e quindi è $n = 18$.

Soluzione del Problema 13.

La risposta corretta è: 72.
Sappiamo che per ogni intero positivo m, il prodotto dei suoi divisori $\Pi(m)$ è dato dalla formula

$$\Pi(m) = m^{\frac{d(m)}{2}}$$

dove $d(m)$ indica il numero di divisori di m.
Applicando tale formula per $m = n^2$ si ottiene

$$\Pi\left(n^2\right) = \left(n^2\right)^{\frac{d\left(n^2\right)}{2}} = n^{d\left(n^2\right)}$$

Grazie a ciò la condizione che il prodotto dei divisori di n^2 sia uguale a n^{35} equivale ad affermare che n^2 ha 35 divisori.
La fattorizzazione di n^2 può quindi essere di due tipi: $n^2 = p^{34}$ e $n^2 = p^4 \cdot q^6$.
Nel primo caso il minimo valore possibile per n è $n = 2^{17}$, nel secondo è $n = 3^2 \cdot 2^3 = 72$.
Il minimo valore per n è dunque 72.

Soluzione del Problema 14.

La risposta corretta è: 3712.
I divisori di $n = 60^{15} = 2^{30} \cdot 3^{15} \cdot 5^{15}$ sono $d(n) = 31 \cdot 16 \cdot 16 = 7936$. Immaginiamo di accoppiarli a due a due formando 3968 coppie (a, b), con $a > b$, tali che $ab = 60^{15}$.
Quando cerchiamo le coppie di interi (x, y) che soddisfano la condizione

$$(x+y)(x-y) = 60^{15} \tag{9}$$

deve essere necessariamente

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$$

dove (a, b) è una delle 3968 coppie formate prima. Tuttavia non tutte le coppie vanno bene perché risolvendo il sistema si ottiene

$$\begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a-b}{2} \end{cases}$$

e quindi x e y sono intere se e solo se a e b sono entrambe pari o entrambe dispari.
Ora, siccome $ab = 60^{15}$, che è pari, a e b non sono mai entrambe dispari, quindi le coppie cattive, ovvero quelle in cui a e b sono uno pari e uno dispari, sono tante quanti i divisori dispari di 60^{15}, che sono $d\left(3^{15} \cdot 5^{15}\right) = 16 \cdot 16 = 256$.

Di conseguenza, delle nostre 3968 coppie di divisori, quelle buone sono $3968 - 256 = 3712$. Quindi sono 3712 anche le coppie di interi positivi (x, y) che soddisfano l'equazione (9).

Soluzione del Problema 15.

La risposta corretta è: 226.
Se identifichiamo $\mathcal{D}$ con una tabella 5×5 adottando le stesse notazioni che abbiamo introdotto nella soluzione del Problema **10**, il nostro problema equivale a contare in quanti modi posso scegliere nella tabella un sottoinsieme $\mathcal{K}$ di almeno due caselle, che sia un'**anticatena**, cioè che abbia la seguente proprietà: *prese comunque due caselle di $\mathcal{K}$, nessuna delle due sta a monte dell'altra.* Si noti che i 25 sottoinsiemi composti da una sola casella sono banalmente anticatene, come pure lo è l'insieme vuoto, ma a noi interessano solo quelle con almeno due caselle.
Per capire meglio come ci muoveremo, partiamo con un esempio.
Un esempio di anticatena è l'insieme $\mathcal{K}$ delle caselle tinte di grigio scuro di Figura 7.
A partire da $\mathcal{K}$ possiamo costrire un insieme più grosso (vedi Figura 8) aggiungendogli tutte le caselle che stanno a valle di almeno una casella di $\mathcal{K}$. Per comodità di esposizione indicheremo tale insieme con $\mathbf{M}(\mathcal{K})$.
Per come è stato costruito, $\mathbf{M}(\mathcal{K})$ ha la seguente proprietà: *se contiene una casella, contiene anche tutte quelle che le stanno a valle.*
Geometricamente tale proprietà significa che $\mathbf{M}(\mathcal{K})$ è a forma di **scala** cioè (vedi Figura 9) che c'è una linea a forma di scala, che parte dal vertice della tabella in alto a sinistra e arriva nel vertice in basso a destra, che separa $\mathbf{M}(\mathcal{K})$ dal resto della tabella.
Si noti in particolare che gli elementi di $\mathcal{K}$ sono tutti e soli gli elementi **minimali** per $\mathbf{M}(\mathcal{K})$, dove $x \in \mathbf{M}(\mathcal{K})$ si dice **minimale** se in $\mathbf{M}(\mathcal{K})$ non c'è alcun altro elemento che gli sta a monte.

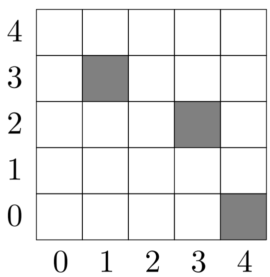

figura 7

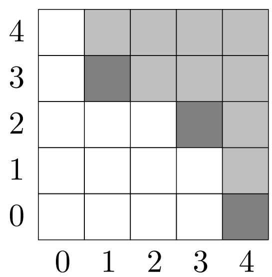

figura 8

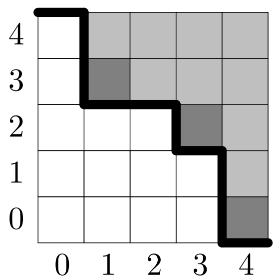

figura 9

Si intuisce facilmente (e tra poco lo dimostreremo) che c'è una corrispondenza biunivoca tra anticatene e scale, sicché per contare le prime basta contare le seconde, che sono banalmente

$$\binom{10}{5} = 252.$$

Togliendo le 26 anticatene con meno di due elementi si ottiene 226, che è la risposta del nostro problema.
Per completezza ora dobbiamo dimostrare che la corrispondenza tra anticatene e insiemi a scala è biunivoca.
Innanzitutto la legge che associa ad ogni anticatena $\mathcal{K}$ l'insieme $\mathbf{M}(\mathcal{K})$ è iniettiva.
Infatti se $\mathbf{M}(\mathcal{K}_1) = \mathbf{M}(\mathcal{K}_2)$ allora hanno gli stessi elementi minimali e quindi $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2$.
Inoltre ogni insieme a scala si può scrivere come $\mathbf{M}(\mathcal{K})$ di qualche catena $\mathcal{K}$, visto che come $\mathcal{K}$ basta prendere l'insieme dei suoi elementi minimali: infatti due elementi minimali, per definizione, non posono mai essere uno a valle dell'altro quindi $\mathcal{K}$ è un'anticatena.

Questo fornisce la suriettività.
Possiamo quindi concludere che la corrispondenza è biunivoca.

Soluzione del Problema 16.

La risposta corretta è: 0.
Basta ricordare che la funzione $\Pi(n)$, cioè quella che calcola il prodotto dei divisori di n, è iniettiva, ovvero se $n_1 \neq n_2$ allora $\Pi(n_1) \neq \Pi(n_2)$.
La dimostrazione si può trovare a pagina 7 di **Lez2019B**.

Soluzione del Problema 17.

La risposta corretta è: 2000.
Immaginiamo di accoppiare a due a due tutti i divisori di 105^7 formando tante coppie (a, b), con $a > b$, tali che $ab = 105^7$.
Quando cerchiamo le coppie di interi (x, y) che soddisfano la condizione

$$(x+y)(x-y) = 105^7 \tag{10}$$

deve essere necessariamente

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$$

dove (a, b) è una delle coppie che abbiamo appena formato.
Siccome 105^7 è dispari, a e b sono sempre dispari e quindi risolvendo (10) si ottiene

$$\begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a-b}{2} \end{cases}$$

dove x e y sono entrambi interi e quindi buoni per il nostro problema.
In particolare si osservi che $x = \frac{a+b}{2}$, quindi sommando gli x che si ottengono per tutte le coppie (a, b) si ottiene esattamente la metà della somma di tutti i divisori di $105^7 = 3^7 \cdot 5^7 \cdot 7^7$, cioè:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{3^8-1}{2} \cdot \frac{5^8-1}{4} \cdot \frac{7^8-1}{6} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{80 \cdot 82}{2} \cdot \frac{624 \cdot 626}{4} \cdot \frac{2400 \cdot 2402}{6} = \\ &= 10 \cdot 41 \cdot 624 \cdot 626 \cdot 800 \cdot 1201 = \ldots 2000. \end{aligned}$$

Soluzione del Problema 18.

La risposta corretta è: 78.

Questo è il tipico problema che si risolve distinguendo tanti casi, dove il trucco è scegliere la casistica sfruttando eventuali simmetrie, in modo che molti casi siano simili tra loro.

Per cominciare osserviamo che, siccome $\Pi(n)$ deve essere un divisore di $30^{35} = 2^{35} \cdot 3^{35} \cdot 5^{35}$, n deve essere della forma

$$n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma. \tag{11}$$

Quindi, tolto il caso ovvio in cui $n = 1$, i casi da distinguere sono 3, a seconda che nella (11) gli esponenti diversi da zero siano uno, due o tre.
Ad esempio, se $n = 2^\alpha$ i casi sono 7 perché

$$\Pi(n) = n^{\frac{d(n)}{2}} = 2^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}}$$

e perciò la condizione che $\Pi(n)$ divida 30^{35} è che $\alpha = 1, 2, \ldots, 7$
Analogamente i casi sono 7 anche quando $n = 3^\beta$ e $n = 5^\gamma$.

Se invece $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta$ si ha

$$\Pi(n) = n^{\frac{d(n)}{2}} = 2^{\frac{\alpha(\alpha+1)(\beta+1)}{2}} \cdot 3^{\frac{\beta(\beta+1)(\alpha+1)}{2}}$$

e la condizione che $\Pi(n)$ divida 30^{35} è che valgano simultaneamente le condizioni

$$\alpha(\alpha+1)(\beta+1) \leq 70 \tag{12}$$

$$\beta(\beta+1)(\alpha+1) \leq 70 \tag{13}$$

dalle quali deduciamo subito che $\alpha, \beta \leq 5$.
A questo punto la verifica diretta mostra che

$$\begin{aligned}
&\text{per } \alpha = 1 \text{ va bene } \beta = 1, \ldots, 5 \\
&\text{per } \alpha = 2 \text{ va bene } \beta = 1, \ldots, 4 \\
&\text{per } \alpha = 3 \text{ va bene } \beta = 1, 2, 3 \\
&\text{per } \alpha = 4 \text{ va bene } \beta = 1, 2 \\
&\text{per } \alpha = 5 \text{ va bene } \beta = 1
\end{aligned}$$

Quindi i casi per $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta$ sono 15.
Ovviamente il conteggio è identico anche nei casi $n = 2^\alpha \cdot 5^\gamma$ e $n = 3^\beta \cdot 5^\gamma$.
Facciamo notare che, volendo minimizzare i calcoli, non c'era davvero bisogno della verifica diretta nei casi $\alpha = 4$ e $\alpha = 5$ ma bastava osservare che la coppia di condizioni $(12) - (13)$ è simmetrica in α e β.

Vediamo infine il caso $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$, con gli esponenti tutti diversi da zero.
Procedendo come nel caso precedente si trova che $\Pi(n)$ divide 30^{35} se e solo se valgono le condizioni

$$\alpha(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) \leq 70 \tag{14}$$

$$\beta(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) \leq 70 \tag{15}$$

$$\gamma(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) \leq 70 \tag{16}$$

dalla simmetria delle quali segue che (α, β, γ) le soddisfa se e solo se le soddisfa ogni sua permutazione. Questo ci permette di semplificare notevolmente la casistica.
Intanto possiamo escludere tutte le terne con i tre numeri diversi visto che già la più piccola, cioè $(1, 2, 3)$, non soddisfa.
Quelle del tipo (k, k, k) invece vanno bene solo per $k = 1, 2$.
Infine, in quelle di tipo (k, k, h), con $k \neq h$, deve essere necessariamente $k \leq 2$, visto che $(3, 3, 1)$ va male. A questo punto la verifica diretta mostra che per $k = 1$ va bene solo $h = 2, 3$ e per $k = 2$ va bene solo $h = 1$. Quindi le terne buone di tipo (k, k, h) sono solo 3 e diventano 9 considerando anche le loro permutazioni.
Aggiungendo poi le due terne buone trovate di tipo (k, k, k) si arriva a 11

Riassumendo: oltre al caso ovvio $n = 1$ gli n della forma (11) che vanno bene sono $3 \cdot 7$ se un solo esponente è positivo, $3 \cdot 15$ se gli esponenti positivi sono 2 e solo 11 se tutti gli esponenti sono positivi.
In tutto quindi sono $1 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 15 + 11$, ovvero 78.

Soluzione del Problema 19.

La risposta corretta è: 45.

Questo è uno di quei problemi in cui si riesce a mitigare l'utilizzo della forza bruta pagando però il prezzo di una casistica articolata. Vediamo come.

Se n è un intero positivo e (x, y) è una coppia di interi non negativi che soddisfa

$$x^2 - y^2 = n$$

allora, posto $a = x - y$ e $b = x + y$, si ha

$$a \cdot b = (x - y)(x + y) = x^2 - y^2 = n.$$

Si noti che a e b sono entrambi pari o entrambi dispari a seconda che x e y abbiano la stessa parità o no. Si noti inoltre che quando n è un quadrato perfetto la soluzione $(x, y) = (\sqrt{n}, 0)$ corrisponde al caso $a = b$.
Premesso ciò, diventa chiaro che contare i modi di scrivere n come differenza di quadrati equivale a contare in quanti modi posso scrivere n come prodotto di due interi a e b, con la stessa parità e tali che $a \leq b$.
Quindi il nostro problema diventa: quanti sono gli interi n, con $2 \leq n \leq 500$ che si possono scrivere esattamente in due modi come prodotto di due numeri entrambi pari?

Cominciamo con qualche osservazione.

Oss. 1. Se n è multiplo di 2 ma non di 4, comunque si prendano a e b interi tali che $n = ab$, essi saranno sempre uno pari e uno dispari. Quindi un tale n non va bene.

Oss. 2. Se $n = 4pqr$, con p, q ed r primi dispari distinti, allora si può scrivere in più di due modi (precisamente in 4) come prodotto di una coppia di numeri pari:

$$n = 2 \cdot (2pqr) = 2p \cdot (2qr) = 2q \cdot (2pr) = 2r \cdot (2pq).$$

Quindi un tale n non va bene.

Oss. 3. Argomentando come nell'osservazione 2, si ottiene più in generale che n è sempre scrivibile in almeno 4 modi come prodotto di due numeri pari se è della forma

$$n = 2^m \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

con $m \geq 2$, $k \geq 3$ e $p_1, p_2, \ldots, p_k$ primi dispari distinti. Quindi non vanno bene nemmeno gli n nella cui fattorizzazione ci sono 3 o più primi dispari distinti.

Oss. 4. Se $n = 2^m \cdot c$, con $c > 1$ e dispari e con $m \geq 4$, allora si può scriverlo almeno in 3 modi come prodotto di 2 numeri pari perché

$$n = 2 \cdot \left(2^{m-1} \cdot c\right) = 2^2 \cdot \left(2^{m-2} \cdot c\right) = 2^3 \cdot \left(2^{m-3} \cdot c\right)$$

sono tutti diversi. Quindi gli n che contengono fattori dispari e che siano divisibili per 16 non vanno bene.

A questo punto possiamo azzardare una casistica non troppo ampia per gli n buoni.
Come effetto collaterale dell'osservazione 3, gli n che cerchiamo, ovvero quelli pari che si possono scrivere esattamente in due modi come differenza di quadrati, non possono avere più di due primi dispari nella loro fattorizzazione, cioè devono essere della forma

$$n = 2^m \cdot p^\alpha \cdot q^\beta$$

con p e q primi dispari distinti, e con $m \geq 2$.
Si tratta ora di capire che valore possono avere gli esponenti.

Analizziamo prima il caso $\alpha = \beta = 0$: se $m \geq 6$ ci sono almeno 3 modi di scrivere 2^m come prodotto di due numeri pari perché

$$2^m = 2 \cdot 2^{m-1} = 2^2 \cdot 2^{m-2} = 2^3 \cdot 2^{m-3}$$

che sono tutti diversi quando $m - 3 \geq 3$. A questo punto la verifica diretta per $m = 2, \ldots, 5$ mostra che i casi buoni sono solo $m = 4$ e $m = 5$.

Passiamo ora al caso in cui uno solo tra α e β sia diverso da zero, cioè supponiamo che n sia della forma

$$n = 2^m \cdot p^\alpha$$

con $\alpha \geq 1$.
Dalle osservazioni 1 e 4 segue che può essere solo $m = 2$ e $m = 3$. La verifica diretta mostra che per $m = 2$ vanno bene solo $\alpha = 2$ e $\alpha = 3$ mentre per $m = 3$ va bene solo $\alpha = 1$.

Vediamo infine il caso in cui n sia della forma

$$n = 2^m \cdot p^\alpha \cdot q^\beta$$

con $\alpha \geq 1$ e $\beta \geq 1$.
Come al punto precedente possiamo escludere tutti i casi in cui non sia $m = 2$ o $m = 3$. Stavolta però anche $m = 3$ è cattivo perché n si riesce a scrivere almeno in 4 modi come prodotto di due pari:

$$n = (2p^\alpha) \cdot \left(4q^\beta\right) = (4p^\alpha) \cdot \left(2q^\beta\right) = 2 \cdot \left(4p^\alpha \cdot q^\beta\right) = 4 \cdot \left(2p^\alpha \cdot q^\beta\right)$$

Invece la verifica diretta mostra che per $m = 2$ va bene solo $\alpha = \beta = 1$.

Riassumendo, oltre a $n = 16$ e $n = 32$, vanno bene tutti e soli gli n delle forme:

$$n = 4 \cdot p^2 \qquad n = 4 \cdot p^3 \qquad n = 8 \cdot p \qquad n = 4 \cdot p \cdot q$$

A questo punto, tenendo presente la lista dei numeri primi maggiori di 2 e minori 67, si trova che gli $n \leq 500$ della prima forma sono 4, quelli della seconda sono 2, quelli delle terza 17 e quelli della quarta 20. Se ad essi si aggiungono $n = 16$ ed $n = 32$ i casi buoni per n sono in tutto 45.

Soluzione del Problema 20.

La risposta corretta è: 1000.

Per ottenere mattoncini tutti uguali bisogna che i piani dei tagli paralleli alla stessa faccia siano tra loro equispaziati e che la distanza tra due piani consecutivi sia un divisore dello spigolo del parallelepipedo ad essi perpendicolare.
Per comodità di esposizione conveniamo che 150 sia la **lunghezza** del parallelepipedo, 90 la **larghezza** e 60 l'**altezza**. In questo modo, quando diciamo che, dopo il taglio, i mattoncini ottenuti sono di dimensioni (a, b, c) stiamo dicendo che a è la **lunghezza** del mattoncino, b è la sua **larghezza** e c l'**altezza**. I mattoncini ottenibili sono quindi tutti e soli quelli la cui corrispondente terna (a, b, c) è tale che a divide 150, b divide 90 e c divide 60; ad esempio $(25, 2, 3)$, $(1, 1, 1)$ e $(150, 90, 60)$ vanno bene, mentre non va bene $(1, 25, 1)$.
Notiamo che $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$ quindi l'insieme $\mathcal{D}_1$ dei suoi divisori ha 12 elementi. Analogamente hanno 12 elementi anche l'insieme $\mathcal{D}_2$ dei divisori di 90 e l'insieme $\mathcal{D}_3$ dei divisori di 60.
Quindi le diverse terne (a, b, c) tali che $a \in \mathcal{D}_1$, $b \in \mathcal{D}_2$ e $c \in \mathcal{D}_3$, sono complessivamente 12^3, cioè 1728. Per comodità indichiamo con $\mathcal{T}$ tale famiglia di terne.
Attenzione però: se consideriamo dello stesso tipo due mattoncini che si possano far coincidere con un movimento rigido dello spazio, allora i diversi tipi di mattoncini ottenibili sono meno delle terne, perché ci sono in $\mathcal{T}$ terne diverse che corrispondono allo stesso tipo di mattoncino. Ad esempio le terne

$$(2, 3, 5) \quad (2, 5, 3) \quad (3, 2, 5) \quad (3, 5, 2) \quad (5, 2, 3) \quad (5, 3, 2)$$

stanno tutte in $\mathcal{T}$, visto che 2, 3 e 5 stanno tutti in $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3$, tuttavia corrispondono tutte a mattoncini dello stesso tipo visto che, a meno di permutazioni, hanno le stesse dimensioni.
Visto che noi non dobbiamo contare le terne ma i tipi, dovremo raggruppare tra loro le terne dello stesso tipo e contare i raggruppamenti.
A tale scopo osserviamo che

$$\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3 = \text{ insieme dei divisori di } 30 \stackrel{\text{def}}{=} W.$$

e quindi W ha 8 elementi e gli insiemi

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_1 - W \qquad B \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_2 - W \qquad C \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_3 - W$$

sono tutti disgiunti e hanno 4 elementi.
In altre parole stiamo dicendo che tutti i numeri che compaiono nelle terne sono solo di due tipi: o dividono sia 150 sia 90 sia 60, ovvero stanno in W, o dividono solo uno dei tre, ovvero stanno in uno solo i tre insiemi A, B e C.
Quasto fatto semplifica la casistica che ora andiamo a fare, perché vale la seguente (ovvia) proprietà:

(P) *se ci sono due terne di $\mathcal{T}$ che contengono lo stesso elemento x ma in posizioni diverse (ad esempio, per una terna è il primo elemento, mentre per l'altra è il terzo) allora x sta in W.*

Ricordiamo che dobbiamo stabilire quali sono le terne di $\mathcal{T}$ che vanno raggruppate, ovvero aventi in $\mathcal{T}$ almeno un'altra terna costituita dagli stessi numeri ma permutati in modo diverso. Grazie alla proprietà (**P**) questo può accadere solo per le terne (a, b, c) che rientrano nei seguenti casi:

(I) a, b e c stanno in W e sono tutti diversi;

(II) a, b e c stanno in W ed esattamente due di essi sono uguali tra loro;

(III) a sta in A mentre b e c stanno in W e sono diversi;

(IV) b sta in B mentre a e c stanno in W e sono diversi;

(V) c sta in C mentre a e b stanno in W e sono diversi.

Le terne del caso (**I**) sono $8 \cdot 7 \cdot 6$, ovvero 336 e, siccome di ciascuna sono presenti in $\mathcal{T}$ tutte le 6 permutazioni, vanno raggruppate a 6 a 6. Quindi sono 56 i raggruppamenti, e quindi anche i corrispondenti tipi diversi di mattoncini.
Nel caso (**II**), invece, le terne sono $3 \cdot 8 \cdot 7$, ovvero 168 e, siccome di ciascuna sono presenti tutte le 3 permutazioni, vanno raggruppate a 3 a 3. Quindi anche stavolta sono 56 i raggruppamenti, e quindi anche i corrispondenti tipi diversi di mattoncini.
Infine, nel caso (**III**), le terne sono $4 \cdot 8 \cdot 7$, ovvero 224 e, stavolta, vanno raggruppate a 2 a 2, perché se la coppia (a, b, c) rientra in questo caso la sua unica permutazione che sta in $\mathcal{T}$ è (a, c, b), Quindi stavolta i raggruppamenti, e quindi anche tipi, sono 112.
I casi (**IV**) e (**V**) sono identici al caso (**III**) quindi le terne raggruppate a due a due sono complessivamente $3 \cdot 224$, ovvero 672, per complessivi 336 raggruppamenti.
Riassumendo, delle 1728 terne, 336 sono raggruppate in 56 gruppi da 6, 168 sono raggruppate in 56 gruppi da 3, 672 sono raggruppate in 336 gruppi da 2 e le rimanenti $1728-(336+168+672) = 552$ stanno da sole in 552 gruppi da 1.
Quindi i raggruppamenti, ovvero i diversi tipi di mattoncini, sono in tutto $56 + 56 + 336 + 552$, cioè 1000.

Soluzione del Problema 21.

La risposta corretta è 0246 perché il risultato cercato è 10246.
Ci viene chiesto quante sono le sequenze di almeno due elementi di $\mathcal{D}$ tali che ogni elemento è divisibile per quello che lo precede.
Se identifichiamo $\mathcal{D}$ con una tabella 5×5 adottando le stesse notazioni che abbiamo introdotto nella soluzione del Problema **10**, il nostro problema equivale a contare in quanti modi posso scegliere nella tabella una sequenza **ordinata** di almeno due caselle, dove ordinata significa che ogni casella della sequenza è a monte della successiva. Per comodità di esposizione chiameremo **buone** le sequenze ordinate che hanno almeno due caselle. Si osservi che le sequenze costituite da una sola casella e la sequenza vuota sono banalmente ordinate, ma non sono buone. Infine chiameremo **ottima** una sequenza **buona** che contenga anche la **prima** casella, cioè quella in basso a sinistra, e l'**ultima**, cioè quella in alto a destra.
Ad esempio sono ottime le sequenze di caselle segnate in grigio nelle Figure **10** e **11** mentre quelle delle Figure **12** e **13** sono buone ma non ottime.

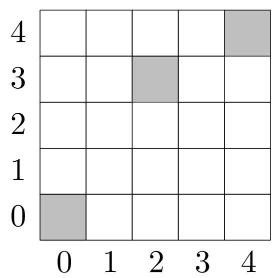
figura 10

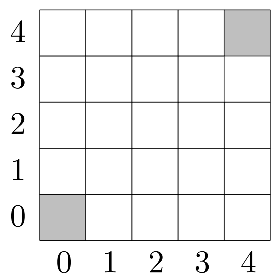
figura 11

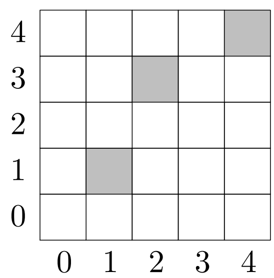
figura 12

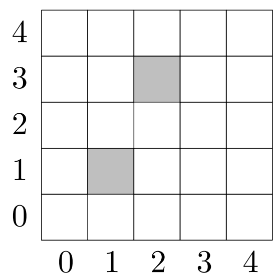
figura 13

Osserviamo che la famiglia delle sequenze ottime è in corrispondenza biunivoca con quella delle sequenze ordinate che non contengono né la prima né l'ultima casella: ciascuna di queste ultime infatti si ottiene in modo univoco da una sequenza ottima togliendole la prima e l'ultima casella. Analogamente si mostra che sono in corrispondenza biunivoca con la famiglia delle sequenze ottime sia quella delle sequenze che contengono la prima casella ma non l'ultima sia quella delle sequenze che contengono l'ultima casella ma non la prima.

Si noti che l'unione di queste quattro famiglie di sequenze costituisce eesattamente la famiglia di tutte le sequenze ordinate.
Possiamo quindi concludere che, se indichiamo con N_O il numero delle sequenze ottime, le sequenze ordinate sono $4N_O$ e quindi, togliendo da quelle ordinate la sequenza vuota e le 25 sequenze di una sola casella, le sequenze buone sono $4N_O - 26$.
Per risolvere il problema basta dunque contare le sequenze ottime che, grazie al fatto che contengono la prima e l'ultima casella possono essere pensate come percorsi, ovvero sequenze di salti, che una pulce fa per passare dalla casella in basso a sinistra a quella in alto a destra.
Ad esempio la sequenza di caselle di Figura **11** corrisponde ad un percorso fatto di un unico salto dalla casella $(0,0)$ alla casella $(4,4)$. Invece la sequenza di caselle di Figura **10** corrisponde ad un percorso fatto di due salti: il primo da $(0,0)$ a $(2,3)$, il secondo da $(2,3)$ a $(4,4)$.
Il problema da risolvere alla fine è diventato il seguente: *quanti sono i percorsi, cioè le diverse sequenze di salti, con le quali una pulce può passare dalla casella in basso a sinistra a quella in alto a destra, dove per salto si intende il passaggio da una casella ad un'altra più a valle?*
Se immaginiamo di scrivere in ogni casella il numero di percorsi che ci arrivano partendo dalla casella in basso a sinistra, la distribuzione di numeri che si ottiene è:

4	8	48	208	768	2568
3	4	20	76	252	768
2	2	8	26	76	208
1	1	3	8	20	48
0	1	1	2	4	8
	0	1	2	3	4

figura 14

Vediamo come è stata calcolata.
Ovviamente nella casella in basso a sinistra è stato messo 1 perché c'è un solo percorso che ci arriva: quello senza salti.
In ogni altra casella invece è stata messa la somma dei numeri delle altre caselle che le stanno a monte. Cerchiamo di capire perché.
Ad esempio, nella casella $(2,1)$ arrivano 8 percorsi perché 3 toccano come penultima la casella $(1,1)$, 2 toccano come penultima la $(2,0)$, 1 la $(0,1)$, 1 la $(1,0)$ e infine 1 arriva direttamente con un solo salto dalla casella iniziale $(0,0)$. Quindi i percorsi che arrivano in $(2,1)$ sono tanti quanti i percorsi che complessivamente sono arrivati in tutte le altre caselle che le stanno a monte. Ovviamente lo stesso vale per ogni casella (n,m) diversa da $(0,0)$: i percorsi che ci arrivano sono tanti quanti i percorsi che sono arrivati in tutte le altre caselle che stanno a monte. Questo giustifica la regola usata per riempire la tabella.
Ad ogni modo, una volta riempita la tabella, possiamo dire che il numero di percorsi che arrivano nella casella in alto a destra è 2568 e, di conseguenza, sono 2568 anche le sequenze ottime.
Ne segue che le sequenze buone sono $4 \cdot 2568 - 26$, cioè 10246, che quindi è la soluzione del nostro problema.
Concludiamo con un'osservazione per velocizzare il calcolo della tabella di Figura 14.
Se indichiamo con $A(n,m)$ il valore contenuto nella casella di coordinate (n,m), quando $n \neq 0$, $m \neq 0$ e $(m,n) \neq (1,1)$ vale la relazione

$$A(n+1,m+1) = 2 \cdot (A(n+1,m) + A(n,m+1) - A(n,m))$$

usando la quale possiamo calcolare il contenuto di una casella usando non tutte le caselle che stanno a monte ma solo le tre più vicine. La validità di tale formula si dimostra facilmente osservando che, se prendiamo il rettangolo di tutte le caselle che stanno a monte della casella (m, n), lei compresa, allora la somma dei valori di tutte le sue caselle è $2A(n, m)$.