Stage Urbi et Orbi - Exe. 1

Titolo nota

12 ottobre 2018 (16.30-18.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma *Tor Vergata*

www.problemisvolti.it

ARITMETICA ZERO: ALCUNI PROBLEMI DELLA GARA

P. 4 TROVARE IL MAX DEI VALORI DI n PER I QUALI $n+2$ DIVIDE n^2+20.

SOLUZIONE EQUIVALE A TROVARE IL MAX DEGLI n CHE RENDONO INTERO $\frac{n^2+20}{n+2}$.

SI HA:

$$\frac{n^2+20}{n+2} = \frac{n^2+2n-2n-4+24}{n+2} =$$

$$= \frac{n(n+2)-2(n+2)+24}{n+2} =$$

$$= \frac{(n+2)(n-2)+24}{n+2} = \frac{\cancel{(n+2)}(n-2)}{\cancel{n+2}} + \frac{24}{n+2} =$$

$$= n-2 + \frac{24}{n+2}$$

(1) SEMPRE INTERO

(2) SE $n+2>24$ NON È INTERO MENTRE SE $n+2=24$ È INTERO, QUINDI IL MASSIMO VALORE DI n CHE LO RENDE INTERO È $\boxed{n=22}$

(1) e (2) $\Rightarrow$ MAX DEGLI n CHE RENDE INTERO $\frac{n^2+20}{n+2}$ È $n=22$

P. 18 PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ SIA $a_n = n^2+50$.

TROVARE IL MAX DEI VALORI CHE SI OTTENGONO, AL VARIARE DI n, QUANDO SI CALCOLA $MCD(a_n, a_{n+1})$

SOLUZIONE IMMAGINIAMO, PER OGNI $n \in \mathbb{N}$, DI CALCOLARE $MCD(a_n, a_{n+1})$:

$$MCD(a_0,a_1) = MCD(50,51) = 1$$

$$MCD(a_1,a_2) = MCD(51,54) = 3$$

$$MCD(a_2,a_3) = MCD(54,59) = 1$$

$$\vdots$$

$$MCD(a_{33},a_{34}) = MCD(1139,1206) = 67$$

I NUMERI CERCHIATI IN ROSSO SONO QUELLI DEI QUALI CI VIENE CHIESTO DI TROVARE IL MASSIMO. SI NOTI CHE, ESSENDO INFINITI, PER QUANTO NE SAPPIAMO ORA POTREBBE ANCHE NON ESSERCI UN MASSIMO.

TUTTAVIA RISCRIVENDOLI CON PIÙ ATTENZIONE SI OTTIENE:

$$
\begin{aligned}
MCD(a_{n+1}, a_n) &= MCD(50+(n+1)^2, 50+n^2) = \\
&= MCD(50+n^2+2n+1, 50+n^2) = \\
&= MCD(50+n^2, 2n+1) = \\
&= MCD(200+4n^2, 2n+1) = \\
&= MCD(4n^2-1+201, 2n+1) = \\
&= MCD((2n+1)(2n-1)+201, 2n+1) = \\
&= MCD(201, 2n+1)
\end{aligned}
$$

PERCHÉ, COME SI È IMPARATO CON L'ALGORITMO EUCLIDEO, TOGLIENDO AD UNO DEI 2 NUMERI UN MULTIPLO DELL'ALTRO, IL MCD NON CAMBIA

PERCHÉ, ESSENDO COMUNQUE $2n+1$ DISPARI, IL MCD NON CAMBIA SE MOLTIPLICO L'ALTRO NUMERO PER UNA POTENZA DI 2

QUINDI, PER OGNI $n \geq 1$, $MCD(a_n, a_{n+1}) = MCD(201, 2n+1)$.

OVVIAMENTE $MCD(2n+1, 201) \leq 201$ PER OGNI n, MA SICCOME PER QUALCHE n VALE PROPRIO 201 (AD ESEMPIO PER $n=100$) POSSIAMO DIRE CHE IL MAX DEI VALORI ASSUNTI AL VARIARE DI n È PROPRIO 201.

P. 16 SIA $n = 9006000$. TROVARE IL PIÙ PICCOLO TRA I DIVISORI DI n CHE SUPERANO $\sqrt{n}$.

SOLUZIONE OSSERVIAMO CHE:

$$
\begin{aligned}
9006000 &= 9\cdot 10^6 + 6\cdot 10^3 + 1 - 1 = (3\cdot 10^3+1)^2 - 1 = 3001^2 - 1^2 = (3001+1)(3001-1) = \\
&= 3002 \cdot 3000
\end{aligned}
$$

DIVISORI "ACCOPPIATI" STANNO UNO SOPRA E UNO SOTTO LA RADICE DI n

QUINDI 3002 È IL DIVISORE CERCATO, VISTO CHE 3001 NON DIVIDE n.

$\boxed{\text{P. 23}}$ DIRE QUANTE SONO LE COPPIE (x,y) DI INTERI POSITIVI TALI CHE:

(*) $$x \cdot y + 3 \cdot \text{mcm}(x,y) = 2018 + 6 \cdot \text{MCD}(x,y)$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$ L'OSSERVAZIONE DI BASE, CHE CI PERMETTE DI SCRIVERE L'EQUAZIONE (*) IN MODO PIÙ TRATTABILE, È CHE SE INDICHIAMO:

(•) $$K = \text{MCD}(x,y)$$

ALLORA OTTENIAMO:

(+) $$x = k \cdot a$$
$$y = k \cdot b$$

CON a E b PRIMI TRA LORO (CIOÈ SENZA FATTORI IN COMUNE).
QUESTO PERCHÈ TUTTI GLI EVENTUALI FATTORI COMUNI A x e y SONO FINITI DENTRO K, CHE È IL $\text{MCD}(x,y)$.
USANDO (•) E (+) PER SOSTITUIRE IN (*) SI OTTIENE:

$$k \cdot a \cdot k \cdot b + 3k \cdot a \cdot b = 2018 + 6k$$

CIOÈ:

$$k \cdot \big((k+3)ab - 6\big) = 2018$$

DA CUI SEGUE CHE K E $(k+3)ab-6$ SONO SEMPRE DIVISORI "ACCOPPIATI" DI 2018.
I CASI DA ANALIZZARE QUINDI SONO POCHI, PERCHÈ

$$2018 = 2 \cdot \underbrace{1009}_{\text{1009 È PRIMO}}$$

E QUINDI I CASI SONO SOLO 4:

1) $k=2018$ $\quad ((k+3)ab-6)=1$

2) $k=1009$ $\quad ((k+3)ab-6)=2$

3) $k=2$ $\quad ((k+3)ab-6)=1009$

4) $k=1$ $\quad ((k+3)ab-6)=2018$

$\boxed{\text{CASO (1)}}$ SE $k=2018$ SI HA:

$$(k+3)ab-6 = 2021\,ab-6 \geq 2021\cdot 1\cdot 1-6 = 2015$$

CHE È IN CONTRADDIZIONE CON $(k+3)ab-6=1$.
QUINDI QUESTO CASO NON SI PUÒ VERIFICARE.

$\boxed{\text{CASO (2)}}$ SE $k=1009$ SI HA:

$$(k+3)ab-6 = 1012\,ab-6 \geq 1012\cdot 1\cdot 1-6 = 1006$$

CHE CONTRADDICE $(k+3)ab-6=2$ E QUINDI NON SI PUŌ VERIFICARE

$\boxed{\text{CASO (3)}}$ SE $k=2$, SOSTITUENDO IN $(k+3)ab-6=1009$ SI OTTIENE:

$$(2+3)ab-6=1009$$

DA CUI SEGUE:

$$ab = 203 = 7\cdot 29$$

SONO 4 PERCHÈ 203 HA 4 DIVISORI

CI SONO QUINDI 4 COPPIE (a,b) CHE SODDISFANO: $(1,203)$, $(7,29)$, $(29,7)$, $(203,1)$.

CIASCUNA DI TALI COPPIE CI FORNISCE UNA COPPIA (x,y) CHE RISOLVE (*), GRAZIE ALLE FORMULE (+).

$\boxed{\text{CASO (4)}}$ SE $k=1$, SOSTITUENDO IN $(k+3)ab-6=2018$ SI OTTIENE:

$$(1+3)ab-6=2018$$

DA CUI SEGUE:

$(\otimes)$
$$ab = 506 = 2\cdot 11\cdot 23$$

RAGIONANDO COME NEL CASO (3), POICHÈ 506 HA 8 DIVISORI, SI

OTTENGONO 8 COPPIE (a,b) CHE SODDISFANO $(\otimes)$, DA CIASCUNA DELLE QUALI SI OTTIENE UNA COPPIA (x,y) CHE SODDISFA $(*)$.

QUINDI COMPLESSIVAMENTE LE COPPIE (x,y) CHE SODDISFANO $(*)$ SONO 12, 4 PROVENIENTI DAL CASO (3) E 8 PROVENIENTI DAL CASO (4).

$\boxed{\text{P. 21}}$ DEL NUMERO n SAPPIAMO SOLO CHE HA 99'000 DIVISORI. QUANTI SONO, AL MINIMO, I QUADRATI CHE LO DIVIDONO?

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$ PER FAR MENTE LOCALE PENSIAMO A QUALE POTREBBE ESSERE LA SCOMPOSIZIONE IN FATTORI DI n.

AD ESEMPIO, PER AVERE $d(n) = 99000$, POTREBBE ESSERE

$$n = p^{98999} \qquad \text{CON } p \text{ PRIMO.}$$

IN TAL CASO I QUADRATI CHE LO DIVIDONO SONO TUTTI E SOLI I NUMERI DEL TIPO

$$(*) \qquad p^{2\alpha} \qquad \text{CON } 0 \leq 2\alpha \leq 98999$$

CHE SONO 49500.

MA n POTREBBE ESSERE DI MOLTI ALTRI TIPI. AD ESEMPIO, POICHÉ

$$99000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 11 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11$$

PER OTTENERE $d(n) = 99000$ SI POTREBBE ANCHE SCEGLIERE n CON UNA FATTORIZZAZIONE DEL TIPO:

$$(\otimes) \qquad n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4^2 \cdot p_5^2 \cdot p_6^4 \cdot p_7^4 \cdot p_8^4 \cdot p_9^{10}$$

NEL QUAL CASO I QUADRATI CHE LO DIVIDONO SONO TUTTI E SOLI I NUMERI DELLA FORMA:

$$P_1^{0} \cdot P_2^{0} \cdot P_3^{0} \cdot P_4^{2\alpha} \cdot P_5^{2\beta} \cdot P_6^{2\gamma} \cdot P_7^{2\delta} \cdot P_8^{2\lambda} \cdot P_9^{2\mu}$$

DOVE $\alpha = 0,1$ $\quad \beta = 0,1$ $\quad \gamma = 0,1,2$ $\quad \delta = 0,1,2$ $\quad \lambda = 0,1,2$ $\quad \mu = 0,1,\dots,5$

QUINDI, COMPLESSIVAMENTE SONO $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6$, CIOÈ 648.

VEDIAMO QUINDI CHE QUANDO n È DEL TIPO $(*)$ I QUADRATI CHE LO DIVIDONO SONO 49500, QUANDO INVECE È DEL TIPO $(\star)$ I QUADRATI CHE LO DIVIDONO SONO 648.
CI SONO TUTTAVIA MOLTI ALTRI CASI: UNO PER OGNI MODO DI SCRIVERE 99000 COME PRODOTTO DI INTERI.
VOGLIAMO MOSTRARE CHE QUELLO CHE HA IL MINOR NUMERO DI QUADRATI CHE LO DIVIDONO È PROPRIO $(\star)$, PER CUI LA RISPOSTA AL NOSTRO PROBLEMA SARÀ 648.
QUESTO SI PUÒ OTTENERE COME CONSEGUENZA DELLA SEGUENTE:

$\boxed{\text{OSSERVAZIONE}}$ SIANO DATI 2 MODI DI SCRIVERE 99'000 COME PRODOTTO DI INTERI MAGGIORI O UGUALI A 2:

$$(\#) \qquad \begin{aligned} \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_k \cdot \boxed{a \cdot b} &= 99'000 \\ \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_k \cdot \boxed{c} &= 99'000 \end{aligned}$$

CHE DIFFERISCONO TRA LORO SOLO PER LA PARTE CERCHIATA DI ROSSO.
A PARTIRE DA ESSI SI POSSONO SCEGLIERE DUE NUMERI m ED n LE CUI FATTORIZZAZIONI SONO:

$$(\bullet) \qquad \begin{aligned} m &= P_1^{\alpha_1 - 1} \cdot P_2^{\alpha_2 - 1} \cdot \dots \cdot P_k^{\alpha_k - 1} \cdot p^{a-1} \cdot q^{b-1} \\ n &= P_1^{\alpha_1 - 1} \cdot P_2^{\alpha_2 - 1} \cdot \dots \cdot P_k^{\alpha_k - 1} \cdot z^{c-1} \end{aligned}$$

OSSERVIAMO CHE $d(m) = d(n) = 99000$.

MOSTRIAMO PERÒ CHE IL NUMERO DI QUADRATI CHE DIVIDONO m È SEMPRE STRETTAMENTE MINORE DI QUELLO DEI QUADRATI CHE DIVIDONO n.

INFATTI I QUADRATI CHE DIVIDONO m SONO TUTTI E SOLI I NUMERI DEL TIPO:

$$p_1^{2\beta_1} \cdot p_2^{2\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\beta_k} \cdot p^{2\alpha} \cdot q^{2\beta}$$

DOVE $2\beta_1 \leq \alpha_1 - 1,\ 2\beta_2 \leq \alpha_2 - 1,\ \ldots,\ 2\beta_k \leq \alpha_k - 1,\ 2\alpha \leq a - 1,\ 2\beta \leq b - 1$

E QUINDI I CASI POSSIBILI SONO IN TUTTO:

SI RICORDI CHE "$\lfloor \cdots \rfloor$" SIGNIFICA "PARTE INTERA DI..."

$$(\otimes) \quad \left(\left\lfloor \frac{\alpha_1 - 1}{2} \right\rfloor + 1\right) \cdot \left(\left\lfloor \frac{\alpha_2 - 1}{2} \right\rfloor + 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\left\lfloor \frac{\alpha_k - 1}{2} \right\rfloor + 1\right) \cdot \left(\left\lfloor \frac{a - 1}{2} \right\rfloor + 1\right) \cdot \left(\left\lfloor \frac{b - 1}{2} \right\rfloor + 1\right)$$

QUINDI LA $(\otimes)$ CI FORNISCE IL NUMERO DEI QUADRATI CHE DIVIDONO m.

IN MODO DEL TUTTO ANALOGO SI TROVA CHE IL NUMERO DEI QUADRATI CHE DIVIDONO n È DATO DA:

$$(+) \quad \left(\left\lfloor \frac{\alpha_1 - 1}{2} \right\rfloor + 1\right) \cdot \left(\left\lfloor \frac{\alpha_2 - 1}{2} \right\rfloor + 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\left\lfloor \frac{\alpha_k - 1}{2} \right\rfloor + 1\right) \cdot \left(\left\lfloor \frac{c - 1}{2} \right\rfloor + 1\right)$$

VISTO CHE I PRIMI k FATTORI DI $(\otimes)$ E $(+)$ SONO IDENTICI, PER MOSTRARE CHE $(+) > (\otimes)$ BASTERÀ MOSTRARE CHE

$$(\square) \quad \left(\left\lfloor \frac{c - 1}{2} \right\rfloor + 1\right) > \left(\left\lfloor \frac{a - 1}{2} \right\rfloor + 1\right) \cdot \left(\left\lfloor \frac{b - 1}{2} \right\rfloor + 1\right).$$

UTILIZZANDO IL FATTO CHE $a \cdot b = c$, CHE SEGUE DA $(\#)$, RISCRIVIAMO LA $(\square)$ NEI CASI:

$\boxed{\text{CASO 1}}$: a, b PARI $\boxed{\text{CASO 2}}$: a, b DISPARI $\boxed{\text{CASO 3}}$: a, b UNO PARI E UNO DISPARI

$\boxed{\text{CASO 1}}$ DIMOSTRARE (D) EQUIVALE A DIMOSTRARE CHE

$$\frac{ab-2}{2}+1 > \left(\frac{a-2}{2}+1\right)\left(\frac{b-2}{2}+1\right)$$

CIOÈ CHE

$$\frac{ab}{2} > \frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}$$

CHE SEMPRE VERA ESSENDO a E b POSITIVI.

$\boxed{\text{CASO 2}}$ DIMOSTRARE (D) EQUIVALE A DIMOSTRARE CHE:

$$\frac{ab-1}{2}+1 > \left(\frac{a-1}{2}+1\right)\left(\frac{b-1}{2}+1\right)$$

CIOÈ CHE:

$$\frac{ab+1}{2} > \frac{a+1}{2}\cdot\frac{b+1}{2}$$

CIOÈ CHE:

$$2ab+2 > ab+a+b+1$$

CIOÈ CHE:

$$ab-a-b+1>0$$

CIOÈ CHE:

$$(a-1)(b-1)>0$$

CHE È VERA VISTO CHE SAPPIAMO CHE $a\geq 2$ E $b\geq 2$.

$\boxed{\text{CASO 3}}$ DIMOSTRARE (D) EQUIVALE A DIMOSTRARE CHE:

$$\frac{ab-2}{2}+1 > \left(\frac{a-2}{2}+1\right)\left(\frac{b-1}{2}+1\right)$$

SENZA PERDERE DI GENERALITÀ SI PUÒ SEMPRE SUPPORRE CHE QUELLO PARI SIA a E QUELLO DISPARI SIA b

CIOÈ CHE:

$$\frac{ab}{2} > \frac{a}{2}\cdot\frac{b+1}{2}$$

CIOÈ CHE:

$$b > \frac{b+1}{2}$$

CIOÈ CHE:

$$b > 1$$

CHE È VERO, VISTO CHE SAPPIAMO CHE $b \geq 2$.

RIASSUMENDO: ABBIAMO DIMOSTRATO CHE m ED n DEFINITI DA (●), PUR AVENDO ENTRAMBI 99000 DIVISORI, SONO TALI CHE I QUADRATI CHE DIVIDONO m SONO STRETTAMENTE DI MENO DEI QUADRATI CHE DIVIDONO n.
APPLICANDO RIPETUTAMENTE QUESTA OSSERVAZIONE SI OTTIENE CHE IL NUMERO DI QUADRATI CHE DIVIDONO n È MINIMO QUANDO n È DELLA FORMA (✱), E IN TAL CASO IL NUMERO DI QUADRATI CHE LO DIVIDONO È 648.