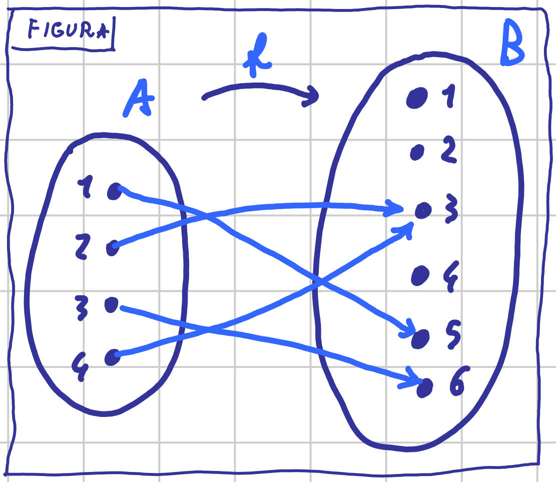
Stage Urbi et Orbi - Exe. 2

26 ottobre 2018 (16.30-18.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

www.problemisvolti.it

COMBINATORIA ZERO: ALCUNI PROBLEMI DELLA GARA

P. 10 DIRE QUANTE SONO LE FUNZIONI $f: A \to B$, DOVE $A = \{1,2,3,4\}$ E $B = \{1,2,3,4,5,6\}$.

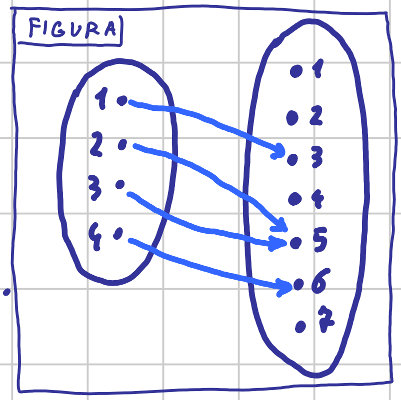


SOLUZIONE UNA FUNZIONE f DA A A B È UN MODO QUALSIASI DI ASSOCIARE A CIASCUN ELEMENTO DELL'INSIEME A UNO ED UN SOLO ELEMENTO DELL'INSIEME B.

È CONSUETUDINE RAPPRESENTARE UNA FUNZIONE f COME UN INSIEME DI FRECCE CHE (VEDI FIGURA), PARTENDO UNA DA CIASCUN ELEMENTO DI A, VANNO A COLPIRE L'ELEMENTO DI B AD ESSO ASSOCIATO.

CONTARE QUANTE SONO LE FUNZIONI DA A A B EQUIVALE A CONTARE QUANTI SONO I MODI DI MANDARE IN B LE 4 FRECCE CHE PARTONO DA A. POICHÉ OGNI FRECCIA PUÒ ESSERE MANDATA IN 6 MODI, I CASI POSSIBILI SONO $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$, CIOÈ 1296.

P. 13 DATI $A = \{1,2,3,4\}$ E $B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, DIRE QUANTE SONO LE FUNZIONI $f: A \to B$ CHE SONO DEBOLMENTE CRESCENTI.



SOLUZIONE RICORDIAMO CHE UNA FUNZIONE È DEBOLMENTE CRESCENTE SE LE PUNTE CONSERVANO (IN SENSO DEBOLE) L'ORDINAMENTO DELLE CODE, CIOÈ SE, QUANDO $n < m$, SI HA ANCHE $f(n) \le f(m)$.

DATO $n \in A$, CON $f(n)$ SI INDICA L'IMMAGINE DI n, CIOÈ L'ELEMENTO DI B SU CUI VA A PIANTARSI LA FRECCIA CHE PARTE DA n.

UN ESEMPIO DI FUNZIONE DEBOLMENTE CRESCENTE È QUELLO IN FIGURA DOVE SI HA:

(*)
$$\underset{\underset{3}{\|}}{f(1)} < \underset{\underset{5}{\|}}{f(2)} = \underset{\underset{5}{\|}}{f(3)} < \underset{\underset{6}{\|}}{f(4)}$$

GRAFICAMENTE LA CONDIZIONE (*) SIGNIFICA CHE LE FRECCE NON SI "SCAVALCANO" MAI, AL MASSIMO COLPISCONO LO STESSO OGGETTO.

SI NOTI CHE UNA VOLTA STABILITO, PER OGNI ELEMENTO DI B, QUANTE FRECCE LO DEVONO COLPIRE, LA CONDIZIONE CHE f SIA DEBOLMENTE CRESCENTE È SUFFICIENTE A DETERMINARE IN MODO UNIVOCO DOVE VA CIASCUNA FRECCIA.

AD ESEMPIO, AVER DECISO CHE NELL'INSIEME B IL 3 VIENE COLPITO UNA VOLTA, IL 5 DUE VOLTE E IL 6 UNA VOLTA, CI FORZA A MANDARE 1 IN 3, 2 E 3 IN 5 E 4 IN 6 (VEDI FIGURA).

QUINDI, PER CONTARE QUANTE SONO LE FUNZIONI DEBOLMENTE CRESCENTI DA A A B È SUFFICIENTE CONTARE IN QUANTI MODI 4 COLPI DI FRECCIA POSSONO ESSERE DISTRIBUITI TRA I 7 ELEMENTI DI B, AMMETTENDO CHE LO STESSO ELEMENTO POSSA ANCHE ESSERE COLPITO PIÙ DI UNA VOLTA.

CHIARAMENTE, NOMI A PARTE, CIÒ EQUIVALE A CONTARE IN QUANTI MODI SI POSSONO DISTRIBUIRE 4 CARAMELLE A 7 BIMBI.

POSSIAMO QUINDI CONCLUDERE (COME NEL PROBLEMA 6 DELLA LEZIONE 2) CHE SONO TANTI QUANTI GLI ANAGRAMMI DI UNA PAROLA CON 4 LETTERE A E 6 LETTERE B, CHE SONO:

$$\frac{10!}{4!\cdot 6!} = \frac{10\cdot \overset{3}{\cancel{9}}\cdot \cancel{8}\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{6!}} = 10\cdot 3\cdot 7 = 210$$

$\boxed{\text{P.14}}$ IN QUANTI MODI POSSO SCEGLIERE 5 NUMERI DA 1 A 20 IN MODO CHE, COMUNQUE PRESI 2 DI ESSI, LA LORO DIFFERENZA È SEMPRE MAGGIORE O UGUALE A 4.

SOLUZIONE PER FAR MENTE LOCALE, PRENDIAMO UNA SCELTA DI 5 NUMERI CHE VADA BENE, AD ESEMPIO: $\{2, 7, 11, 15, 20\}$

UN POSSIBILE MODO DI IMMAGINARLA È QUELLA DI PRENDERE UNA LISTA DI 20 CASELLE, NUMERATE DA 1 A 20, E DI COLORARE DI ROSSO QUELLE CORRISPONDENTI AI NUMERI SCELTI:

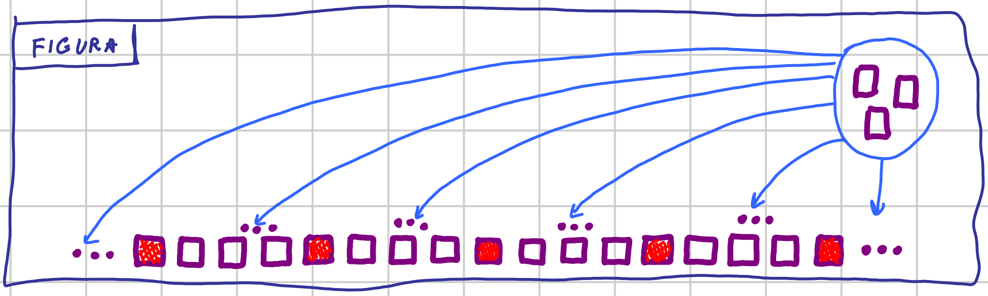
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

IL FATTO CHE LA DIFFERENZA TRA DUE QUALSIASI NUMERI SCELTI SIA SEMPRE MAGGIORE O UGUALE A 4 EQUIVALE A DIRE CHE LE CASELLE DELLA STRISCIA COLORATE DI ROSSO SONO SEMPRE SEPARATE TRA LORO DA ALMENO 3 CASELLE BIANCHE.

IL NOSTRO PROBLEMA È QUINDI EQUIVALENTE AL SEGUENTE:

SE HO 5 CASELLE ROSSE E 15 CASELLE BIANCHE, IN QUANTI MODI POSSO METTERLE IN FILA IN MODO CHE DUE CASELLE ROSSE SIANO SEMPRE SEPARATE DA ALMENO 3 CASELLE BIANCHE?

SI NOTI CHE UNA QUALSIASI STRISCIA DI CASELLE CON LA PROPRIETÀ RICHIESTA SI PUÒ COSTRUIRE NEL MODO RAPPRESENTATO NELLA FIGURA SEGUENTE, CIOÈ:



I PASSO METTERE IN FILA LE 5 CASELLE ROSSE SEPARATE A 2 A 2 DA 3 CASELLE BIANCHE.

II PASSO INSERIRE LE 3 CASELLE BIANCHE RIMANENTI IN TUTTI I MODI POSSIBILI NELLE 6 POSIZIONI INDICATE.

CONTARE QUANTE SONO LE DIVERSE STRISCE CHE POSSO OTTENERE, EQUIVALE A CONTARE IN QUANTI MODI DIVERSI POSSO ESEGUIRE IL II PASSO, CIOÈ IN QUANTI MODI POSSO DISTRIBUIRE 3 CASELLE IN 6 POSIZIONI.

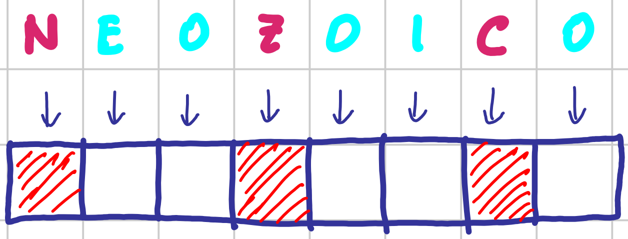
QUESTO È CHIARAMENTE COME CONTARE IN QUANTI MODI POSSO DISTRIBUIRE 3 CARAMELLE A 6 BIMBI, CHE SONO: $\frac{(3+5)!}{3!\cdot 5!} = \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5!}}{\cancel{3\cdot 2}\cdot \cancel{5!}} = 56$.

P.16 QUANTI SONO GLI ANAGRAMMI DELLA PAROLA **NEOZOICO** NEI QUALI NON CI SONO MAI 2 CONSONANTI VICINE?

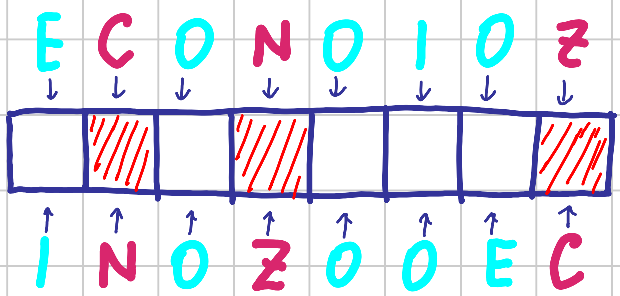
SOLUZIONE PER OGNI ANAGRAMMA DELLA PAROLA DATA, IMMAGINIAMO DI COSTRUIRE UNA SEQUENZA DI CASELLE BIANCHE E ROSSE NELLA QUALE LE CASELLE ROSSE CORRISPONDONO ALLE CONSONANTI E QUELLE BIANCHE ALLE VOCALI.

AD ESEMPIO, SE PRENDIAMO LA PAROLA STESSA, SI HA:

(*)



NOTIAMO CHE LA STESSA CONFIGURAZIONE DI CASELLE BIANCHE E ROSSE CORRISPONDE A MOLTI ANAGRAMMI, AD ESEMPIO:



PIÙ PRECISAMENTE OGNI STRISCIA DI 5 CASELLE BIANCHE E 3 CASELLE ROSSE CORRISPONDE TANTI ANAGRAMMI DI NEOZOICO QUANTI SONO I MODI DI PERMUTARE LE CONSONANTI TRA I 3 POSTI ROSSI E LE VOCALI TRA I 5 POSTI BIANCHI.

MA POICHÉ:

ANAGRAMMI DI NZC $= 3! = 6$

ANAGRAMMI DI EOOIO $= \dfrac{5!}{3!\cdot 1!\cdot 1!} = 20$

AD OGNI STRISCIA DI 5 POSTI BIANCHI E 3 POSTI ROSSI CORRISPONDONO

$6 \cdot 20$, CIOÈ 120, ANAGRAMMI DI NEOZOICO.

PER CONCLUDERE LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA BASTERÀ QUINDI CONTARE QUANTE SONO LE POSSIBILI STRISCE DI 3 POSTI ROSSI E 5 POSTI BIANCHI NELLE QUALI OGNI COPPIA DI POSTI ROSSI È SEPARATA DA ALMENO UN POSTO BIANCO.

NOTIAMO CHE IL PROBLEMA È IDENTICO, ANCHE SE CON NUMERI PIÙ PICCOLI, A QUELLO TRATTATO NEL PROBLEMA 14, DOVE LE STRISCE ERANO DI 20 CASELLE, 5 ROSSE E 15 BIANCHE, E OGNI COPPIA DI CASELLE ROSSE ERA SEPARATA DA ALMENO 3 CASELLE BIANCHE.

UTILIZZANDO LO STESSO PROCEDIMENTO USATO NEL PROBLEMA 14 (CHE NON RIPETIAMO) SI ARRIVA A DIRE CHE LE STRISCE CHE CI INTERESSANO ORA SONO TANTE QUANTI I MODI DI DARE 3 CARAMELLE A 4 BIMBI, CHE SONO:

$$\frac{(3+3)!}{3!\cdot 3!} = \frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3\cdot 2}\cdot 1\cdot \cancel{3!}} = 20$$

QUINDI LE CONFIGURAZIONI DI 5 POSTI PER VOCALE E 3 PER CONSONANTE, NELLE QUALI I POSTI PER CONSONANTE NON SONO MAI VICINI, SONO 20.
POICHÈ A CIASCUNO DI ESSI CORRISPONDONO 120 ANAGRAMMI DI NEOZOICO, POSSIAMO CONCLUDERE CHE GLI ANAGRAMMI DI NEOZOICO SENZA CONSONANTI VICINE SONO $20 \cdot 120$, CIOÈ 2400.

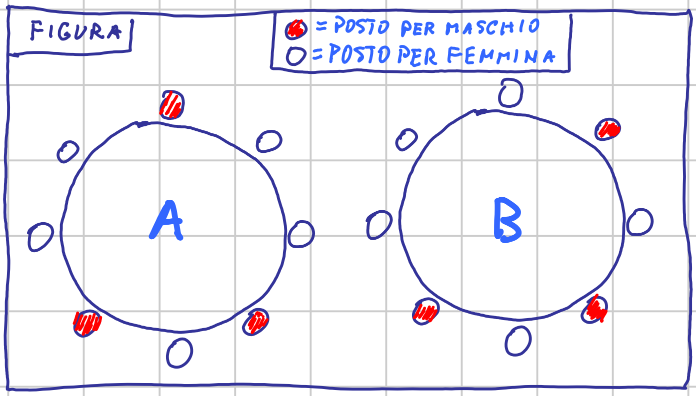
P. 18 UGO, ALDO, LUCA, ADA, EVA, IDA, SARA E CLAUDIA SI SIEDONO AD UNA TAVOLA ROTONDA CON 8 POSTI, IN MODO CHE NESSUN MASCHIO SIA VICINO AD UN ALTRO MASCHIO. IN QUANTI MODI POSSONO FARLO? (DUE MODI VANNO CONSIDERATI UGUALI, E QUINDI CONTATI UNA VOLTA SOLA, SE ESISTE UNA ROTAZIONE DEL TAVOLO CHE LI FA COINCIDERE).

SOLUZIONE ANCHE QUI, COME NEL PROBLEMA 16, CONVIENE PROCEDERE TENENDO SEPARATI I DUE PASSI:

I PASSO IN QUANTI MODI, A MENO DI ROTAZIONI DEL TAVOLO, SI POSSONO

FISSARE 3 POSTI PER MASCHIO E 5 POSTI PER FEMMINA IN MODO CHE I 3 POSTI PER MASCHIO NON SIANO MAI VICINI?

II PASSO UNA VOLTA FISSATA UNA CONFIGURAZIONE DI 3 POSTI PER MASCHIO E 5 POSTI PER FEMMINA, IN QUANTI MODI POSSO DISTRIBUIRCI I 3 RAGAZZI E LE 5 RAGAZZE?



SVOLGIMENTO I PASSO A MENO DI ROTAZIONI, LE UNICHE CONFIGURAZIONI POSSIBILI DI POSTI SONO LE 2 IN FIGURA. INFATTI CI SONO SOLO 2 MODI PER SUDDIVIDERE I 5 POSTI PER FEMMINA IN 3 GRUPPI NON VUOTI: $2+2+1$ E $3+1+1$.

INOLTRE TUTTI I MODI DI RAGGRUPPARE I POSTI DA RAGAZZA COME $2+2+1$ COINCIDONO, A MENO DI ROTAZIONI, CON LA CONFIGURAZIONE A, MENTRE I RAGGRUPPAMENTI DI TIPO $3+1+1$ COINCIDONO SEMPRE CON B.

SVOLGIMENTO II PASSO I 3 RAGAZZI POSSONO ESSERE PERMUTATI TRA I 3 POSTI LORO RISERVATI IN $3!$ MODI, CIOÈ IN 6 MODI.

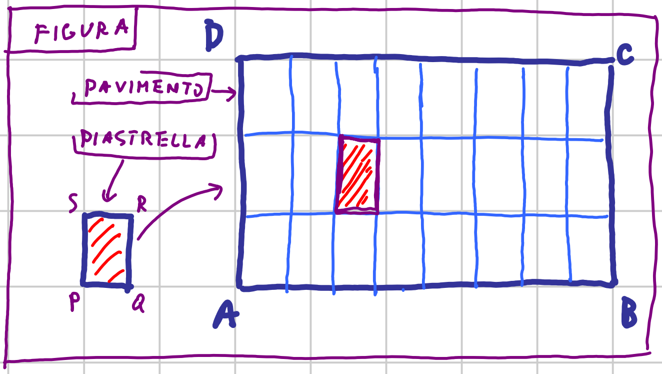
ANALOGAMENTE LE 5 RAGAZZE POSSONO ESSERE PERMUTATE IN $5!$ MODI, CIOÈ IN 120 MODI, TRA I POSTI LORO ASSEGNATI.

QUINDI, IN CIASCUNA DELLE 2 CONFIGURAZIONI POSSIBILI, LE PERSONE POSSONO ESSERE DISTRIBUITE IN $6 \cdot 120$ MODI, CIOÈ IN 720 MODI.

QUINDI, COMPLESSIVAMENTE, I MODI DI SEDERSI A TAVOLA SONO $2 \cdot 720$, CIOÈ 1440.

P.19 DATO UN PAVIMENTO RETTANGOLARE ($54\,m \times 36\,m$), SI VUOLE RICOPRIRLO ESATTAMENTE (SENZA DOVER TAGLIARE LE PIASTRELLE) CON PIASTRELLE RETTANGOLARI TUTTE UGUALI, CON LATI LA CUI MISURA ESPRESSA IN cm È INTERA, POSATE TUTTE CON LA STESSA ORIENTAZIONE (CIOÈ I LATI "LUNGHI" DELLE PIASTRELLE SONO TUTTI PARALLELI TRA LORO). QUANTI SONO I DIVERSI TIPI DI PIASTRELLE CHE PERMETTONO DI FARLO?

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$ UN TIPO DI PIASTRELLE ANDRÀ BENE SE E SOLO SE IL LATO PQ È UN DIVISORE DI AB E IL LATO PS È UN DIVISORE DI AD (VEDI FIGURA), DOVE CHIARAMENTE TUTTE LE MISURE SONO ESPRESSE IN cm.



SI RICORDI CHE $AB = 5400$ cm E CHE $5400 = 54 \cdot 100 = 6 \cdot 9 \cdot 2^2 5^2 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2$,

QUINDI, I DIVISORI DI 5400 SONO

$$d(5400) = 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48,$$

QUINDI I CASI POSSIBILI PER PQ SONO 48.

ANALOGAMENTE, ESSENDO $AD = 3600$ cm E $3600 = 60^2 = (2^2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, OTTENIAMO CHE I DIVISORI DI 3600 SONO:

$$d(3600) = 5 \cdot 3 \cdot 3 = 45,$$

QUINDI I CASI POSSIBILI PER PS SONO 45.

SEMBREREBBE QUINDI CHE, IN TUTTO, I TIPI DI PIASTRELLE UTILIZZABILI SIANO $48 \cdot 45$, CIOÈ 2160.

INVECE NON È COSÌ PERCHÈ, IN QUESTO CALCOLO, NUMEROSI TIPI DI PIASTRELLE SONO STATI CONTATI 2 VOLTE: AD ESEMPIO È STATA CONTATA SIA LA PIASTRELLA 20×30 CHE QUELLA 30×20, CHE INVECE ANDAVANO (OVVIAMENTE) CONTATE UNA SOLA VOLTA, PERCHÈ SONO LA STESSA PIASTRELLA.

MA QUALI SONO LE PIASTRELLE CONTATE 2 VOLTE?

SONO TUTTE E SOLE LE PIASTRELLE NON QUADRATE, AVENTI ENTRAMBI I LATI CHE SONO DIVISORI SIA DI 5400 CHE DI 3600.

ORA, I DIVISORI COMUNI DI 5400 E 3600 SONO I DIVISORI DI MCD(5400, 3600), QUINDI:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{DIVISORI COMUNI}\\ \text{DI 5400 E 3600}\end{array}} = d\big(\mathrm{MCD}(5400,3600)\big) = d(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2) = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36.$$

DI CONSEGUENZA LE PIASTRELLE NON QUADRATE AVENTI ENTRAMBI

I LATI CHE DIVIDONO SIA 5400 CHE 3600 SONO TANTE QUANTI SONO I MODI DI SCEGLIERE 2 DEI 36 DIVISORI COMUNI A 5400 E 3600, CHE SONO APPUNTO

$$\binom{36}{2} = \frac{36!}{2!\cdot 34!} = \frac{\overset{18}{\cancel{36}}\cdot 35\cdot \cancel{34!}}{\cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{34!}} = 18\cdot 35 = 630$$

QUINDI LE DIVERSE PIASTRELLE CHE VANNO BENE PER PIASTRELLARE ESATTAMENTE IL PAVIMENTO, NON SONO $48\cdot 45$, BENSÌ:

$$48\cdot 45 - \binom{36}{2} = 2160 - 630 = 1530.$$