# Stage Urbi et Orbi - Exe. 3

Titolo nota

16 novembre 2018 (16.30-18.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma *Tor Vergata*

www.problemisvolti.it

## EQUAZIONI DIOFANTEE LINEARI: ALCUNI PROBLEMI DELLA GARA

**PROBLEMA 14** SUI 2 PIATTI DI UNA BILANCIA SONO DISTRIBUITI TANTI PESETTI DA 10 GRAMMI E DA 16 GRAMMI IN MODO TALE CHE LA DIFFERENZA DI PESO TRA I 2 PIATTI SIA DI 2018 GRAMMI. MI VIENE ORDINATO DI SPOSTARE UN PÒ DI PESETTI DA UN PIATTO ALL'ALTRO IN MODO DA RIMETTERE IN EQUILIBRIO I PIATTI. QUAL È IL MINIMO NUMERO DI PESETTI CHE DEVO SPOSTARE?

**SOLUZIONE** IN REALTÀ È IMPOSSIBILE ESEGUIRE L'ORDINE. INFATTI SE SPOSTO UN PESETTO DA 10 GRAMMI DA UN PIATTO ALL'ALTRO LA DIFFERENZA TRA I 2 PIATTI VARIA DI 20 GRAMMI (NON DI 10!!). ANALOGAMENTE, SPOSTANDO UN PESETTO DI 16, LA DIFFERENZA VARIA DI 32. SICCOME SIA 20 CHE 32 SONO MULTIPLI DI 4, OGNI COMBINAZIONE DI SPOSTAMENTI PUÒ FAR VARIARE LA DIFFERENZA DEI PIATTI SOLO DI UNA QUANTITÀ CHE SIA MULTIPLA DI 4. MA ALLORA 2018 NON PUÒ DIVENTARE ZERO, PERCHÈ NON È UN MULTIPLO DI 4.

---

**PROBLEMA 15** UNA PULCE SALTA TRA I PUNTI DELL'ASSE x. PARTE DALL'ORIGINE E IN AVANTI PUÒ FARE SALTI LUNGHI 6, 34 E 51, MENTRE ALL'INDIETRO PUÒ SOLO FARE SALTI LUNGHI 34 E 51. SE FA UNA SEQUENZA DI SALTI CHE LA PORTA SUL PUNTO 79, QUAL È IL MINIMO NUMERO DI SALTI LUNGHI 6 CHE FA?

**SOLUZIONE** COME AL SOLITO USIAMO LA CONVENZIONE CHE SE IL NUMERO DI SALTI È POSITIVO, I SALTI VENGONO FATTI IN AVANTI, MENTRE SE È NEGATIVO VENGONO FATTI INDIETRO. ALLORA DETTO $X$ IL NUMERO DI PASSI LUNGHI 6, $Y$ IL NUMERO DI QUELLI LUNGHI 34 E $Z$ IL NUMERO DI QUELLI LUNGHI 51, SE VOGLIAMO CHE LA PULCE ARRIVI IN 79 BISOGNA CHE:

$(\bullet)$ $$6X + 34Y + 51Z = 79$$

CHIEDERE QUAL È IL MINIMO NUMERO DI PASSI LUNGHI 6 CHE BISOGNA FARE, SAPENDO CHE POSSONO ESSERE FATTI SOLO IN AVANTI, EQUIVALE A CHIEDERE QUAL È IL MINIMO VALORE NON NEGATIVO CHE PUÒ ASSUMERE $X$, AL VARIARE DI TUTTE LE POSSIBILI SOLUZIONI $(x,y,z)$ DI $(\bullet)$.

RISCRIVIAMO $(\bullet)$ NEL MODO SEGUENTE:

$(\times)$ $$6X + 17(2Y + 3Z) = 79$$

ALLORA PER OGNI SOLUZIONE $(x_0, y_0, z_0)$ DI $(\times)$ SI TROVA UNA SOLUZIONE $(x_0, w_0)$ DI:

$(+)$ $$6X + 17W = 79$$

OTTENUTA PONENDO $W_0 = 2Y_0 + 3Z_0$.

VICEVERSA, PER OGNI SOLUZIONE $(x_1, w_1)$ DI $(+)$, SI PUÒ COSTRUIRE UNA SOLUZIONE $(x_1, y_1, z_1)$ DI $(\times)$, PRENDENDO $X_1$ E $Y_1$ IN MODO CHE RISOLVANO:

$$2X + 3Y = W_1$$

CIÒ È SEMPRE POSSIBILE PERCHÉ $MCD(2,3) = 1$.

QUINDI TROVARE IL MINIMO VALORE NON NEGATIVO DI $X$ AL VARIARE DI TUTTE LE SOLUZIONI $(x,y,z)$ DI $(\bullet)$ EQUIVALE A TROVARE IL MINIMO VALORE NON NEGATIVO DI $X$ AL VARIARE DI TUTTE LE SOLUZIONI $(x,w)$ DI $(+)$.

A QUESTO PUNTO, USANDO I METODI IMPARATI A LEZIONE, È SEMPLICE TROVARE CHE LA SOLUZIONE GENERALE DI $(+)$ È:

$$(16 + 17k, -1 - 6k) \quad \text{CON } k \text{ INTERO.}$$

QUINDI IL MINIMO VALORE NON NEGATIVO DI $X$ È 16 CHE SI OTTIENE PER $k=0$.

**PROBLEMA 23** UN CANGURO SALTA TRA I PUNTI DEL PIANO CARTESIANO. DIREMO CHE UN SALTO È DI TIPO $(a,b)$ SE IL CANGURO PASSA DALLA POSIZIONE $(x,y)$ ALLA POSIZIONE $(x+a, y+b)$. SAPPIAMO CHE IL CANGURO PARTE DA $(0,0)$ E PUÒ FARE SALTI DEI SEGUENTI TIPI: $(10,14)$, $(-10,-14)$, $(6,10)$, $(-6,-10)$, $(15,35)$ E $(-15,-35)$. QUAL È IL MINIMO NUMERO DI SALTI CHE DEVE FARE PER ARRIVARE IN $(1,1)$?

**SOLUZIONE** NOTIAMO CHE A DUE A DUE I SALTI SONO OPPOSTI TRA LORO, QUINDI I TIPI DI SALTO SONO ESSENZIALMENTE 3: $(10,14)$, $(6,10)$ E $(15,35)$, MA CIASCUNO DI ESSI PUÒ ESSERE FATTO SIA IN AVANTI CHE ALL'INDIETRO. AD ESEMPIO FARE $-3$ VOLTE $(6,10)$ SIGNIFICHERÀ, PER NOI, FARE 3 VOLTE $(-6,-10)$.

FISSATE QUESTE NOTAZIONI CI CHIEDIAMO QUANTI SALTI DI CIASCUN TIPO DOBBIAMO FARE PER ARRIVARE IN $(1,1)$.

DETTO ALGEBRICAMENTE, CERCHIAMO UNA TERNA DI INTERI $(x,y,z)$ IN MODO TALE CHE:

$$x\cdot(10,14)+y\cdot(6,10)+z(15,35)=(1,1)$$

CHE, SCRITTA COMPONENTE PER COMPONENTE, EQUIVALE A:

$$\begin{array}{l} (\square_1) \\ (\square_2) \end{array} \begin{cases} 10x+6y+15z=1 \\ 14x+10y+35z=1 \end{cases}$$

SOTTRAENDO $(\square_1)$ A $(\square_2)$ SI OTTIENE:

$$4x+4y+20z=0$$

CIOÈ:

$$5z=-x-y$$

GRAZIE ALLA QUALE $(\square_1)$ DIVENTA:

$$10x+6y+3(-x-y)=1$$

CIOÈ:

$$7x+3y=1$$

QUINDI IL SISTEMA DI PARTENZA È EQUIVALENTE A:

$$\begin{array}{l} (\Delta_1) \\ (\Delta_2) \end{array}\begin{cases} 5z=-x-y \\ 7x+3y=1 \end{cases}$$

CON I METODI IMPARATI A LEZIONE SI TROVA SUBITO CHE LE COPPIE $(x,y)$ CHE SODDISFANO $(\Delta_2)$ SONO TUTTE E SOLE QUELLE DEL TIPO:

$$(*)\quad \begin{array}{l} x=1-3k \\ y=-2+7k \end{array} \qquad \text{CON } k \text{ INTERO}$$

TUTTAVIA, NON TUTTE VANNO BENE COME SOLUZIONI DEL SISTEMA: DOBBIAMO TENERE SOLO QUELLE CHE SOSTITUITE IN $(\Delta_1)$ RENDONO INTERA ANCHE $z$. SOSTITUENDO SI OTTIENE:

$$5z=-(1-3k)-(-2+7k)$$

CIOÈ:

$$4k+5z=1$$

LE CUI SOLUZIONI INTERE SONO:

$$(\oplus)\quad \begin{array}{l} k=-1+5m \\ z=1-4m \end{array} \qquad \text{CON } m \text{ INTERO}$$

COMBINANDO LE $(\oplus)$ CON LE $(*)$ SI OTTIENE

$$x=1-3k=1-3(-1+5m)=4-15m$$

$$y=-2+7k=-2+7(-1+5m)=-9+35m$$

ABBIAMO QUINDI OTTENUTO CHE LE TERNE $(x, y, z)$ CHE SODDISFANO IL SISTEMA INIZIALE SONO TUTTE E SOLE QUELLE DEL TIPO:

$$(4-15m, -9+35m, 1-4m) \quad \text{CON } m \text{ INTERO.}$$

LA "PIÙ PICCOLA", CIOÈ QUELLA CHE MINIMIZZA $|x|+|y|+|z|$, STAVOLTA È QUELLA CHE SI OTTIENE PER $m=0$, CIOÈ:

$$(4, -9, 1)$$

CIÒ SIGNIFICA CHE IL MINIMO NUMERO DI SALTI CHE MI SERVONO PER PASSARE DA $(0,0)$ A $(1,1)$ È $14$, CIOÈ $4$ SALTI DI TIPO $(10,14)$, $9$ SALTI DI TIPO $(-6,-10)$ E $1$ SALTO DI TIPO $(15,35)$.

---

**PROBLEMA 21** DATA L'EQUAZIONE DIOFANTEA $6765x+4181y=1$, TROVARNE LA SOLUZIONE $(x,y)$ NELLA QUALE $x$ ASSUME IL MINIMO VALORE POSITIVO.

**IDEA DI SOLUZIONE** SE SI COMINCIA, APPLICANDO IL PROCEDIMENTO STANDARD, A SCRIVERE LA SEQUENZA DEI RESTI SI OTTIENE:

$$6765, 4181, 2584, 1597, 987, 610, 377, \ldots$$

INVECE DI PROSEGUIRE CON I CALCOLI (UN PO' LUNGHI) DEL PROCEDIMENTO STANDARD, NOTIAMO CHE SI TRATTA DI NUMERI DI FIBONACCI.

PIÙ PRECISAMENTE, SE CON $F_n$ INDICHIAMO L'$n$-ESIMO NUMERO DI FIBONACCI, SI HA $F_{20}=6765$ E $F_{19}=4181$.

A QUESTO PUNTO SI NOTA (!!!) CHE, DATI 4 NUMERI DI FIBONACCI CONSECUTIVI, VALE L'IDENTITÀ:

$$(\#) \qquad F_n F_{n-3} - F_{n-1} F_{n-2} = (-1)^n$$

CHE PUÒ FACILMENTE ESSERE DIMOSTRATA PER INDUZIONE SU $n$.

GRAZIE A (#) UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE CERCATA È:

$$(F_{17}, -F_{18})$$

CIOÈ:

$$(1597, -2584)$$

CHE È ANCHE LA SOLUZIONE CHE MINIMIZZA IL VALORE POSITIVO DELLA $x$, VISTO CHE LA SOLUZIONE GENERALE È:

$$(1597 + 4181k, -2584 - 6765k)$$ CON $k$ INTERO