Stage Urbi et Orbi - Exe. 6

18 gennaio 2018 (16.00-17.30) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

www.problemisvolti.it

QUOZIENTARE & ALTRE TECNICHE: ALCUNI PROBLEMI DELLA GARA

OSSERVAZIONE 1 IL PRIMO PROBLEMA CHE TRATTEREMO FORNISCE UN ESEMPIO DI UTILIZZO DEL COSIDETTO PRINCIPIO DI INCLUSIONE/ESCLUSIONE, CHE NON ABBIAMO AVUTO IL TEMPO DI TRATTARE NELLA LEZIONE PRIMA DELLA GARA E CHE QUINDI, PER COMPLETEZZA, RICORDIAMO QUI DI SEGUITO.

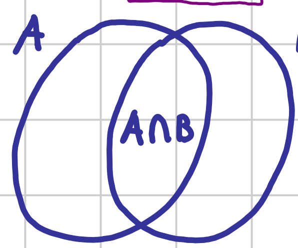
NOTAZIONE 1 DATO UN INSIEME A CON UN NUMERO FINITO DI ELEMENTI, QUANDO SCRIVIAMO $|A|$ INTENDIAMO: "NUMERO DI ELEMENTI DI A".

PRINCIPIO DI INCLUSIONE/ESCLUSIONE (CASO 2 INSIEMI)

DATI DUE INSIEMI FINITI A E B ALLORA SI HA:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (1)$$

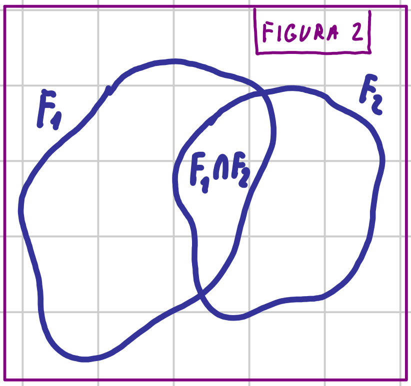
FIGURA 1



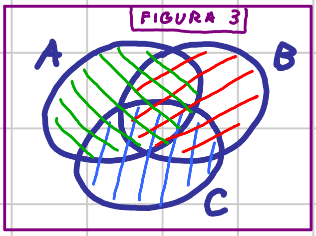
OSSERVAZIONE 2 GIUSTIFICARE LA FORMULA (1) È MOLTO SEMPLICE (VEDI FIGURA 1): SE VOGLIO CONTARE QUANTI ELEMENTI STANNO IN $A \cup B$ NON POSSO SEMPLICEMENTE PRENDERE $|A| + |B|$, ALTRIMENTI AVREI CONTATO DUE VOLTE GLI ELEMENTI DI $A \cap B$. DEVO QUINDI RICORDARE DI TOGLIERE $|A \cap B|$: IN TAL MODO NEL SECONDO MEMBRO DI (1) OGNI ELEMENTO DI $A \cup B$ VIENE CONTATO ESATTAMENTE UNA VOLTA.

OSSERVAZIONE 3 LA (1) VALE (OVVIAMENTE) ANCHE PER LE AREE (VEDI FIGURA 2).

DATE DUE FIGURE F_1 E F_2, SI HA:



$$(2) \quad \text{AREA}(F_1 \cup F_2) = \text{AREA}(F_1) + \text{AREA}(F_2) - \text{AREA}(F_1 \cap F_2)$$



PRINCIPIO DI INCLUSIONE/ESCLUSIONE (CASO 3 INSIEMI)

DATI TRE INSIEMI FINITI A, B E C ALLORA SI HA:

$$(3) \quad |A \cup B \cup C| = \big(|A| + |B| + |C|\big) - \big(|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|\big) + |A \cap B \cap C|$$

OSSERVAZIONE 3 ANCHE GIUSTIFICARE LA (3) È ABBASTANZA SEMPLICE: BASTA VERIFICARE CHE OGNI ELEMENTO DI $A \cup B \cup C$ VIENE "CONTATO" UNA SOLA VOLTA DAL SECONDO MEMBRO DI (3), CIOÈ CHE, TOGLIENDOLO, L'ESPRESSIONE AL SECONDO MEMBRO DIMINUISCE ESATTAMENTE DI 1. INFATTI, FATTO QUESTO, SIAMO SICURI CHE OGNI VOLTA CHE ELIMINIAMO UN ELEMENTO DA $A \cup B \cup C$ SIA IL PRIMO CHE IL SECONDO MEMBRO DIMINUISCONO DELLA STESSA QUANTITÀ. CIÒ SIGNIFICA CHE PER MOSTRARE CHE LA (3) VALE SEMPRE BASTA VERIFICARE CHE VALE QUANDO $A \cup B \cup C$ HA 0 ELEMENTI, COSA CHE È OVVIA.

PER CHIUDERE IL RAGIONAMENTO CI RIMANE QUINDI DA DIMOSTRARE CHE OGNI ELEMENTO x DI $A \cup B \cup C$ VIENE CONTATO DAL SECONDO MEMBRO DI (3) ESATTAMENTE 1 VOLTA. PER FARLO DISTINGUIAMO 3 CASI.

I CASO L'ELEMENTO x STA IN TUTTI GLI INSIEMI A, B E C.

ALLORA x VIENE "CONTATO" 3 VOLTE DAL TERMINE $\big(|A| + |B| + |C|\big)$, -3 VOLTE DAL TERMINE $-\big(|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|\big)$ E INFINE 1 VOLTA DAL TERMINE $|A \cap B \cap C|$. QUINDI, IN TUTTO,

VIENE CONTATO $3-3+1$ VOLTE, CIOÈ 1 VOLTA.

$\boxed{\text{II CASO}}$ L'ELEMENTO x STA IN 2 DEI 3 INSIEMI.

SUPPONIAMO, AD ESEMPIO CHE x STIA IN B E IN C MA NON IN A. ALLORA x VIENE CONTATO 2 VOLTE DA $(|A|+|B|+|C|)$, -1 VOLTA DA $-(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)$ E 0 VOLTE DA $(A\cap B\cap C)$. QUINDI IN TUTTO, VIENE CONTATO $2-1+0$ VOLTE, CIOÈ 1 VOLTA.

I CASI IN CUI x STA IN A E B MA NON C, OPPURE A E C MA NON B, SI TRATTANO IN MODO ANALOGO.

$\boxed{\text{III CASO}}$ L'ELEMENTO x STA IN UNO SOLO DEGLI INSIEMI.

QUESTO CASO È IL PIÙ SEMPLICE: x VIENE CONTATO 1 VOLTA DAL TERMINE $(|A|+|B|+|C|)$ E 0 VOLTE DAGLI ALTRI, QUINDI, IN TUTTO, VIENE CONTATO 1 VOLTA.

QUESTO COMPLETA LA DIMOSTRAZIONE.

OSSERVAZIONE 4 INVECE DI ENUNCIARE E DIMOSTRARE IL CASO GENERALE (CIOÈ CON n INSIEMI) DEL PRINCIPIO DI INCLUSIONE/ESCLUSIONE CI LIMITIAMO ORA AD ENUNCIARE IL CASO CON 4 INSIEMI, CHE È QUELLO CHE CI SERVIRÀ PER RISOLVERE IL PRIMO PROBLEMA CHE AFFRONTEREMO. OMETTIAMO LA DIMOSTRAZIONE, CHE È DEL TUTTO ANALOGA AL CASO DI 3 INSIEMI.

PRINCIPIO DI INCLUSIONE/ESCLUSIONE (CASO 4 INSIEMI)

DATI 4 INSIEMI FINITI A_1, A_2, A_3 E A_4, SI HA:

$$|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4| = |A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4| -$$

CI SONO 6 TERMINI PERCHÉ I MODI DI SCEGLIERE $\{i,j\}$ CON $i\neq j$ IN $\{1,2,3,4\}$ SONO $\binom{4}{2}$ CIOÈ 6

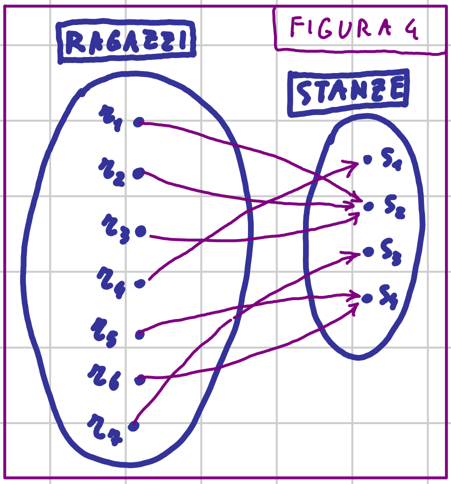
$$(4)\qquad -\left(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_1\cap A_4|+|A_2\cap A_3|+|A_2\cap A_4|+|A_3\cap A_4|\right) +$$

SONO 4 TERMINI PERCHÉ I MODI DI SCEGLIERE $\{i,j,k\}$, DIVERSI, IN $\{1,2,3,4\}$ SONO $\binom{4}{3}$, CIOÈ 4

$$+\left(|A_1\cap A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_4|+|A_1\cap A_3\cap A_4|+|A_2\cap A_3\cap A_4|\right) -$$

$$-|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|$$

PROBLEMA 12 UN GRUPPO DI 7 RAGAZZI HA PRENOTATO 4 STANZE D'ALBERGO. IN QUANTI MODI DIVERSI I 7 RAGAZZI POSSONO DISTRIBUIRSI NELLE 4 STANZE LORO ASSEGNATE FACENDO IN MODO CHE IN OGNI STANZA CI SIA ALMENO UN RAGAZZO. (SI SUPPONGA CHE OGNI STANZA SIA ABBASTANZA GRANDE DA POTER CONTENERE QUALSIASI NUMERO DI RAGAZZI CI SI VOGLIA METTERE. INOLTRE SI NOTI CHE SIA I RAGAZZI CHE LE STANZE SONO DISTINGUIBILI TRA LORO.)



SOLUZIONE OGNI MODO DI DISTRIBUIRE I 7 RAGAZZI NELLE 4 STANZE PUÒ ESSERE IMMAGINATO COME UN INSIEME DI FRECCE CHE ASSOCIA AD OGNI RAGAZZO LA STANZA IN CUI VIENE MANDATO, CIOÈ COME UNA FUNZIONE DALL'INSIEME DEI RAGAZZI ALL'INSIEME DELLE STANZE (VEDI FIGURA 4).

LA CONDIZIONE CHE NON CI SIANO STANZE VUOTE EQUIVALE A RICHIEDERE CHE LA FUNZIONE SIA SURIETTIVA.

IL PROBLEMA ASSEGNATO È QUINDI EQUIVALENTE AL SEGUENTE:

PROBLEMA 12 bis QUANTE SONO LE FUNZIONI SURIETTIVE DA $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ A $B = \{1,2,3,4\}$?

SOLUZIONE SAPPIAMO CHE TUTTE LE FUNZIONI (SURIETTIVE E NON SURIETTIVE) SONO 4^7. BASTERÀ QUINDI CONTARE QUANTE SONO LE NON SURIETTIVE E FARE LA DIFFERENZA. A TALE SCOPO INDICHIAMO CON F_1 L'INSIEME DI TUTTE LE FUNZIONI f DA A A B TALI CHE NESSUN ELEMENTO DI A VIENE MANDATO IN 1. IN SIMBOLI:

$$F_1 = \{ f : A \to B \mid \text{PER OGNI } a \in A \text{ SI HA } f(a) \neq 1 \}$$

IN MODO DEL TUTTO ANALOGO DEFINIAMO F_2, F_3 ED F_4.

TUTTE LE FUNZIONI CHE STANNO IN F_1, F_2, F_3 O F_4 SONO CHIARAMENTE

NON SURIETTIVE E, VICEVERSA, SE f NON È SURIETTIVA DEVE STARE IN ALMENO UNO DEGLI F_i. QUINDI:

$$\text{INSIEME DELLE FUNZIONI NON SURIETTIVE} = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$$

POSSIAMO QUINDI CONTARNE IL NUMERO DI ELEMENTI USANDO (4).

OSSERVIAMO CHE:

(a) $|F_1| = |F_2| = |F_3| = |F_4| = 3^7$. INFATTI F_1 È L'INSIEME DI TUTTE LE FUNZIONI DA $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ A $\{2,3,4\}$, QUINDI $|F_1| = 3^7$. PER $|F_2|$, $|F_3|$ ED $|F_4|$ SI RAGIONA ALLO STESSO MODO.

(b) SE $i \neq j$ ALLORA $|F_i \cap F_j| = 2^7$. FACCIAMO IL CALCOLO PER $|F_1 \cap F_2|$, GLI ALTRI SONO ANALOGHI. BASTA OSSERVARE CHE $F_1 \cap F_2$ È L'INSIEME DI TUTTE LE FUNZIONI DA $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ A $\{3,4\}$, CHE SONO 2^7.

(c) SE i, j, k SONO TUTTI DIVERSI ALLORA $|F_i \cap F_j \cap F_k| = 1 = 1^7$. VERIFICHIAMOLO PER $F_1 \cap F_2 \cap F_3$ (PER GLI ALTRI È UGUALE). $F_1 \cap F_2 \cap F_3$ SONO LE FUNZIONI DA $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ IN $\{4\}$, CHE È UNA SOLA.

(d) $|F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4| = 0$ PERCHÉ $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$ È L'INSIEME DELLE FUNZIONI DA $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ ALL'INSIEME VUOTO.

GRAZIE AD (a), (b), (c) E (d), APPLICANDO LA (4) A $|F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4|$ SI OTTIENE:

$$|F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4| = \binom{4}{1} \cdot 3^7 - \binom{4}{2} 2^7 + \binom{4}{1} 1^7 - \binom{4}{0} 0^7$$

CHE RAPPRESENTA IL NUMERO DI FUNZIONI NON SURIETTIVE DA $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ A $\{1,2,3,4\}$. QUINDI:

$$\text{NUM. FUNZ. SURIETTIVE} = \text{NUM. TUTTE} - \text{NUM. FUNZ. NON SURIETTIVE} =$$

$$= 4^7 - |F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4| = \tag{5}$$

$$= \binom{4}{0} 4^7 - \binom{4}{1} 3^7 + \binom{4}{2} 2^7 - \binom{4}{3} 1^7 + \binom{4}{0} 0^7 = \dots = 8400$$

GENERALIZZAZIONE NELLA SUA FORMA PIÙ GENERALE (n INSIEMI) IL PRINCIPIO DI INCLUSIONE/ESCLUSIONE AFFERMA CHE:

DATI n INSIEMI FINITI: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ALLORA SI HA:

SOMMA DI TUTTI GLI $|A_i|$, CHE SONO n

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_i |A_i| +$$

SOMMA DI TUTTI GLI $|A_i \cap A_j|$ AL VARIARE DI TUTTI I MODI POSSIBILI DI SCEGLIERE L'INSIEME $\{i,j\}$ CON $i \neq j$

$$+ (-1) \cdot \sum_{\{i,j\} \subset \{1,2,\ldots,n\}} |A_i \cap A_j| +$$

$$\vdots$$

SOMMA DI TUTTI GLI $|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$ AL VARIARE DI TUTTI I MODI DI SCEGLIERE UN INSIEME DI k INDICI DIVERSI $\{i_1, \ldots, i_k\}$ IN $\{1,2,\ldots,n\}$. SI NOTI CHE I MODI SONO $\binom{n}{k}$ E QUINDI I TERMINI DI QUESTA SOMMA SONO $\binom{n}{k}$

$$+ (-1)^{k-1} \sum_{\{i_1, i_2, \ldots i_k\} \subset \{1,2,\ldots,n\}} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| +$$

$$\vdots$$

$$+ (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

UTILIZZANDO TALE FORMULA SI RIESCE A "CONTARE" LE FUNZIONI SURIETTIVE DA $\{1,2,\ldots,m\}$ A $\{1,2,\ldots,n\}$, CON $m \geq n$. SI TROVA CIOÈ CHE LA (5) VALE ANCORA, MA CON m AL POSTO DI 7 E n AL POSTO DI 4:

NUM. FUNZ. SURIETTIVE = NUM. TUTTE − NUM. FUNZ. NON SURIETTIVE =

$$= n^m - |F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n| =$$

(6)
$$= \binom{n}{0} n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \cdots + (-1)^k \binom{n}{k}(n-k)^m + \cdots + (-1)^{n-1}(n-n)^m =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$$

OSSERVAZIONE 4 QUANDO $n=m$, LE FUNZIONI SURIETTIVE DA $\{1,2,\ldots,m\}$ A $\{1,2,\ldots,n\}$ SONO LE CORRISPONDENZE BIUNIVOCHE, CHE SONO $n!$. QUINDI, GRAZIE A (6) CON $n=m$, SI OTTIENE L'IDENTITÀ:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n = n!$$
