Stage Urbi et Orbi - Exe. 8

Titolo nota

22 febbraio 2019 (16.00-17.30) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

www.problemisvolti.it

SOMME NOTEVOLI

SOLUZIONE DEI PROBLEMI 5, 17, 11, 18, 12, 14, 15, 16 DELLA GARA

PROBLEMA 5 CALCOLARE $3^0\cdot 2^{11}+3^1\cdot 2^{10}+3^2\cdot 2^9+\dots+3^9\cdot 2^2+3^{10}\cdot 2^1+3^{11}\cdot 2^0$.

SOLUZIONE BASTA RICORDARE IL PRODOTTO NOTEVOLE:

$$(x-1)(x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x^2+x+1)=x^{n+1}-1$$

CHE PUÒ ESSERE RISCRITTO COME:

$$(1)\qquad 1+x+x^2+\dots+x^{n-1}+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

LA NOSTRA SOMMA DIVENTA:

$$3^0\cdot 2^{11}+3^1\cdot 2^{10}+3^2\cdot 2^9+\dots+3^9\cdot 2^2+3^{10}\cdot 2^1+3^{11}\cdot 2^0=$$

$$=2^{11}\left(1+\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\dots+\left(\frac{3}{2}\right)^9+\left(\frac{3}{2}\right)^{10}+\left(\frac{3}{2}\right)^{11}\right)=$$

APPLICANDO LA (1) CON $n=12$ E $x=\frac{3}{2}$

$$=2^{11}\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}-1}{\frac{3}{2}-1}=2^{12}\cdot\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{12}-1\right)=3^{12}-2^{12}$$

QUINDI, ANZICHÈ CALCOLARE LA SOMMA RICHIESTA, BASTA CALCOLARE:

$$3^{12}-2^{12}=(3^6-2^6)(3^6+2^6)=(729-64)(729+64)=665\cdot 793=52\boxed{7.345}$$

RISPOSTA PER GARA A SQUADRE

PROBLEMA 17 CALCOLARE: $19\cdot 1+18\cdot 2+17\cdot 2^2+16\cdot 2^3+\dots+3\cdot 2^{16}+2\cdot 2^{17}+1\cdot 2^{18}$.

SOLUZIONE SE IN GENERALE PONIAMO:

$$S_n=n\cdot 1+(n-1)\cdot 2+(n-2)\cdot 2^2+\dots+2\cdot 2^{n-2}+1\cdot 2^{n-1}$$

ALLORA IL PROBLEMA CI CHIEDE DI TROVARE S_{19}.

OSSERVIAMO CHE:

$$S_{n+1}-S_n=(n+1)\cdot 1+n\cdot 2+(n-1)\cdot 2^2+\cdots+3\cdot 2^{n-2}+2\cdot 2^{n-1}+1\cdot 2^n-$$
$$-\left(n\cdot 1+(n-1)\cdot 2+(n-2)\cdot 2^2+\cdots+2\cdot 2^{n-2}+1\cdot 2^{n-1}\right)$$
$$=1+2+2^2+\cdots+2^{n-2}+2^{n-1}+2^n=$$
$$=2^{n+1}-1$$

ABBIAMO QUINDI SCOPERTO CHE, PER OGNI INTERO POSITIVO n, SI HA:

(2) $$S_{n+1}-S_n=2^{n+1}-1$$

SCRIVIAMO ORA (2) DA 1 A $n-1$ E SOMMIAMO MEMBRO A MEMBRO:

SOMMARE MEMBRO A MEMBRO

$$S_2-S_1=2^2-1$$
$$S_3-S_2=2^3-1$$
$$S_4-S_3=2^4-1$$
$$\vdots$$
$$S_n-S_{n-1}=2^n-1$$

$$S_n-S_1=\left(2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n\right)-(\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n-1})$$
$$=-1-2+\left(1+2+2^2+\cdots+2^n\right)-(n-1)=$$
$$=-3+2^{n+1}-1-(n-1)=2^{n+1}-(n+3)$$

CIOÈ ABBIAMO TROVATO:

(3) $$S_n-S_1=2^{n+1}-(n+3)$$

MA SICCOME SI CALCOLA SUBITO CHE $S_1=1$, LA (3) DIVENTA:

$$S_n=2^{n+1}-(n+2)$$

E QUINDI LA SOLUZIONE DEL NOSTRO PROBLEMA È:

$$S_{19} = 2^{20} - 21 = 1024 \cdot 1024 - 21 = 104\boxed{8555}$$

RISULTATO PER GARA A SQUADRE

PROBLEMA 11 CALCOLARE $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \dots + \frac{1}{99\cdot 100}$.

SOLUZIONE SI HA:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \dots + \frac{1}{99\cdot 100} =$$

$$= \frac{2-1}{1\cdot 2} + \frac{3-2}{2\cdot 3} + \frac{4-3}{3\cdot 4} + \frac{5-4}{4\cdot 5} + \dots + \frac{100-99}{99\cdot 100} =$$

$$= \frac{\cancel{2}}{1\cdot \cancel{2}} - \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{\cancel{3}}{2\cdot \cancel{3}} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 3} + \frac{\cancel{4}}{3\cdot \cancel{4}} - \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot 4} + \frac{\cancel{5}}{4\cdot \cancel{5}} - \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}\cdot 5} + \dots + \frac{\cancel{100}}{99\cdot \cancel{100}} - \frac{\cancel{99}}{\cancel{99}\cdot 100} =$$

$$= 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\dots} \cancel{+} \cancel{\frac{1}{99}} - \frac{1}{100} =$$

$$= 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

LA RISPOSTA PER LA GARA A SQUADRE È 99+100 CIOÈ 9900

PROBLEMA 18 CALCOLARE $\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_1+T_2} + \frac{1}{T_1+T_2+T_3} + \dots + \frac{1}{T_1+T_2+\dots+T_{20}}$.

SOLUZIONE NEL PROBLEMA 4 DELLA LEZIONE 8 ABBIAMO IMPARATO CHE:

$$T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n = \binom{n+2}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

QUINDI:

$$\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_1+T_2} + \frac{1}{T_1+T_2+T_3} + \dots + \frac{1}{T_1+T_2+\dots+T_{20}} =$$

$$= \frac{6}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{6}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{6}{3\cdot 4\cdot 5} + \dots + \frac{6}{20\cdot 21\cdot 22} =$$

$$= 3\left(\frac{3-1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{4-2}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{5-3}{3\cdot 4\cdot 5} + \dots + \frac{22-20}{20\cdot 21\cdot 22}\right) =$$

$$= 3\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \cancel{\frac{1}{2\cdot 3}} + \cancel{\frac{1}{2\cdot 3}} - \cancel{\frac{1}{3\cdot 4}} + \cancel{\frac{1}{3\cdot 4}} - \cancel{\frac{1}{4\cdot 5}} + \cancel{\ } \cdots \cancel{\ } + \cancel{\frac{1}{20\cdot 21}} - \frac{1}{21\cdot 22}\right) =$$

$$= 3\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{21\cdot 22}\right) = \frac{\cancel{3}\cdot(21\cdot 11 - 1)}{{}_{7}\cancel{21}\cdot 22} = \frac{230}{7\cdot 22} = \frac{115}{77}$$

LA RISPOSTA PER LA GARA A SQUADRE È 115+77, CIOÈ 192

OSSERVAZIONE IMPORTANTE VALE LA FORMULA:

STA PER "HIGHER ORDER TERMS" CIOÈ "TERMINI DI GRADO PIÙ ALTO".

$$(4) \qquad (1 + x + x^2 + \dots + x^n + H.O.T.)^{k+1} =$$

$$= \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k}x + \binom{k+2}{k}x^2 + \dots + \binom{k+n}{k}x^n + H.O.T.$$

PER DIMOSTRARLA SI PROCEDE IN MODO ANALOGO A QUANTO FATTO NELLA III SOLUZIONE DEL PROBLEMA 5 DELLA LEZIONE 8, DOVE È STATO TRATTATO IL CASO PARTICOLARE $k=3$ ED $n=99$.

PROBLEMA 12 DIRE CHI È IL COEFFICIENTE DI x^{11} NEL POLINOMIO RIDOTTO AI MINIMI TERMINI CHE SI OTTIENE CALCOLANDO:

$$(1 + 2x + 3x^2 + \dots + 2014\,x^{2013})^9$$

SOLUZIONE OSSERVIAMO CHE:

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + 2014\,x^{2013} =$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + \dots + 12x^{11} + H.O.T. =$$

USANDO (4)

$$= \binom{1}{1} + \binom{2}{1}x + \binom{3}{1}x^2 + \dots + \binom{12}{1}x^{11} + H.O.T. =$$

$$= (1 + x + x^2 + \dots + x^{11} + H.O.T.)^2$$

QUINDI:

$$(1 + 2x + 3x^2 + \dots + 2014\,x^{2013})^9 =$$

USANDO (4)

$$= (1 + x + x^2 + \dots + x^{11} + H.O.T.)^{18} =$$

$$= \binom{17}{17} + \binom{18}{17}x + \binom{19}{17}x^2 + \cdots + \binom{28}{17}x^{11} + H.O.T.$$

QUINDI LA RISPOSTA È:

$$\binom{28}{17} = \binom{28}{11} = \frac{\cancel{28}\cdot\cancel{27}\cdot 26\cdot \overset{5}{\cancel{25}}\cdot\cancel{24}\cdot 23\cdot\cancel{22}\cdot 21\cdot\cancel{20}\cdot 19\cdot 18}{\cancel{11}\cdot\cancel{10}\cdot\cancel{9}\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} =$$

$$= 26\cdot 5\cdot 23\cdot 21\cdot 19\cdot 18 = \cdots = 2147\boxed{4180}$$

RISULTATO PER GARA A SQUADRE

PROBLEMA 14 CALCOLARE $T_1\cdot T_{50} + T_2\cdot T_{49} + T_3\cdot T_{48} + \cdots + T_{50}\cdot T_1$.

SOLUZIONE SE PRENDIAMO IL POLINOMIO:

(5) $$Q(x) = T_1 + T_2 x + T_3 x^2 + \cdots + T_{50}x^{49} + H.O.T.$$

TROVIAMO CHE IL TERMINE DI GRADO 49 DI $(Q(x))^2$ È:

(6) $$\left(T_1\cdot T_{50} + T_2\cdot T_{49} + T_3\cdot T_{48} + \cdots + T_{50}\cdot T_1\right)x^{49}$$

OSSERVIAMO PERÒ CHE:

$$Q(x) = T_1 + T_2 x + T_3 x^2 + \cdots + T_{50}x^{49} + H.O.T. =$$

$$= \binom{2}{2} + \binom{3}{2}x + \binom{4}{2}x^2 + \cdots + \binom{51}{2}x^{49} + H.O.T. =$$

GRAZIE A (4)

$$= \left(1 + x^2 + x^3 + \cdots + x^{49} + H.O.T.\right)^3$$

MA ALLORA:

$$(Q(x))^2 = \left(1 + x^2 + x^3 + \cdots + x^{49} + H.O.T.\right)^6 =$$

GRAZIE A (4)

$$= \binom{5}{5} + \binom{6}{5}x + \binom{7}{5}x^2 + \cdots + \binom{54}{5}x^{49} + H.O.T.$$

MA SICCOME IL TERMINE DI GRADO 49 DI $(Q(x))^2$ È DATO DA (6)

POSSIAMO AFFERMARE CHE:

$$T_1\cdot T_{50} + T_2\cdot T_{49} + T_3\cdot T_{48} + \cdots + T_{50}\cdot T_1 = \binom{54}{5} = \frac{\overset{9}{\cancel{54}}\cdot 53\cdot\overset{13}{\cancel{52}}\cdot 51\cdot\overset{10}{\cancel{50}}}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = 316\boxed{2510}$$

RISPOSTA PER GARA A SQUADRE

PROBLEMA 15 CALCOLARE LA SOMMA DI TUTTI I TERMINI DEL TIPO $T_\alpha \cdot T_\beta \cdot T_\gamma$ AL VARIARE DI TUTTE LE TERNE (α, β, γ) DI NUMERI INTERI POSITIVI TALI CHE $\alpha+\beta+\gamma = 10$.

SOLUZIONE PROCEDENDO COME NEL PROBLEMA 14, DOPO AVER SCELTO $Q(x)$ COME IN (5) SI MOSTRA CHE LA SOMMA CERCATA È IL COEFFICIENTE DI x^7 IN $(Q(x))^3$, CHE È ANCHE UGUALE A:

$$(Q(x))^3 = (1+x+x^2+\dots+x^7+ H.O.T.)^9 = \dots + \binom{15}{8}x^7 + H.O.T.$$

PER CUI LA SOMMA CERCATA È:

$$\binom{15}{8} = \frac{\cancel{15}\cdot\cancel{14}\cdot 13\cdot\cancel{12}\cdot 11\cdot\cancel{10}^{\,5}\cdot 9}{\cancel{7}\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = 13\cdot 11\cdot 5\cdot 9 = 6435$$

PROBLEMA 16 CALCOLARE LA SOMMA DI TUTTI I TERMINI DEL TIPO $A\cdot B\cdot C\cdot D$ AL VARIARE DI TUTTE LE QUATERNE (A, B, C, D) DI NUMERI INTERI POSITIVI TALI CHE $A+B+C+D = 12$.

SOLUZIONE PROCEDENDO COME NEL PROBLEMA 14, DOPO AVER POSTO

$$Q(x) = 1+2x+3x^2+\dots+9x^8+H.O.T.$$

SI MOSTRA CHE LA SOMMA CERCATA È IL COEFFICIENTE DI x^8 IN $(Q(x))^4$.

MA GRAZIE A (4) ABBIAMO:

$$(Q(x))^4 = (1+x+x^2+\dots+x^8+H.O.T.)^8 = \dots + \binom{15}{7}x^8 + H.O.T.$$

DI CONSEGUENZA LA NOSTRA SOMMA VALE $\binom{15}{7}$, CIOÈ 6435.
