Stage Urbi et Orbi - Lez. 2

Titolo nota

19 ottobre 2018 (15.00-18.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma *Tor Vergata*

www.problemisvolti.it

COMBINATORIA ZERO

PROBLEMA 0 QUANTI SONO GLI ANAGRAMMI DI APE?

SVOLGIMENTO Sono così pochi che è sufficiente elencarli e contarli (sono 6):

AEP	EAP	PAE
APE	EPA	PEA

Osserviamo che:

1. Le parole che iniziano per A sono tante quante quelle che iniziano per E o per P.
2. Una volta scelta la lettera da mettere al primo posto, tutti gli anagrammi che iniziano con quella lettera si ottengono permutando in tutti i modi possibili le lettere rimanenti nelle posizioni successive.

Queste osservazioni ci saranno utili nel problema successivo, dove gli anagrammi saranno troppi per poterli elencare e contare.

PROBLEMA 1 QUANTI SONO GLI ANAGRAMMI DI SETOLA?

SVOLGIMENTO Facendo tesoro delle osservazioni 1 e 2 del PROBLEMA 0, possiamo affermare che gli anagrammi di SETOLA che iniziano per S sono tanti quanti gli anagrammi della parola ETOLA e sono $\frac{1}{6}$ del totale degli anagrammi di SETOLA.

Cioè, se indichiamo con P_6 il numero di anagrammi di una parola con 6 lettere diverse e con P_5 quello di una parola con 5 lettere diverse, quello che abbiamo verificato è che:

$$P_6 = 6 \cdot P_5$$

Ancora non conosciamo né P_6 né P_5, ma appena sapremo P_5 potremo trovare anche P_6.

Si intuisce subito che ragionando in modo analogo si ottiene anche:

$$P_5 = 5 \cdot P_4 , \quad P_4 = 4 \cdot P_3 , \ldots\ldots$$

In generale, se P_n indica il numero di anagrammi di una parola con n lettere tutte diverse, per ogni $n \geq 2$ si ha:

(1) $$P_n = n \, P_{n-1}$$

Poiché una parola di 1 sola lettera ha ovviamente un solo anagramma abbiamo anche

(2) $$P_1 = 1$$

Finalmente, combinando (1) e (2) abbiamo:

$$\begin{aligned}
P_1 &= 1 \\
P_2 &= 2 \cdot P_1 = 2 \cdot 1 \\
P_3 &= 3 \cdot P_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \\
P_4 &= 4 \cdot P_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\
P_5 &= 5 \cdot P_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\
P_6 &= 6 \cdot P_5 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720
\end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere che una parola con 6 lettere tutte diverse (quindi anche SETOLA) ha 720 anagrammi.

GENERALIZZAZIONE Il procedimento utilizzato funziona ovviamente anche se il numero di lettere è diverso da 6.

Possiamo quindi affermare che se una parola è costituita da n lettere tutte diverse, allora il numero dei suoi anagrammi è:

$$P_n = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

SI INDICA CON $n!$ E SI LEGGE "ENNE FATTORIALE"

Inoltre, visto che è irrilevante che gli oggetti permutati siano lettere, diremo in generale che P_n è il numero di PERMUTAZIONI SEMPLICI DI n OGGETTI.

La parola "SEMPLICI" sta a ricordare che gli oggetti sono tutti diversi per distinguerle da quelle "CON RIPETIZIONE", che saranno trattate nei problemi seguenti.

PROBLEMA 2 QUANTI SONO GLI ANAGRAMMI DI ADA?

SVOLGIMENTO Stavolta le considerazioni di prima non valgono, perché in ADA ci sono lettere che si ripetono. Ovviamente, visto che gli anagrammi sono pochi (solo 3), basterebbe elencarli e contarli. Tale metodo però non sarebbe esportabile a parole più lunghe. Per questo motivo utilizzeremo un procedimento che per questo caso sembra inutilmente lungo, ma che ha il vantaggio di funzionare anche nel caso generale.

Per cominciare prendiamo ADA e rendiamo diverse le lettere uguali aggiungendo degli indici:

$$A_1 D A_2$$

La parola così ottenuta ha tutte le lettere diverse e quindi, grazie alla formula delle permutazioni semplici, i suoi anagrammi sono $3!$, cioè 6, che vediamo listati qui sotto:

$3!$

A_1A_2D $\quad$ A_1DA_2 $\quad$ DA_1A_2

A_2A_1D $\quad$ A_2DA_1 $\quad$ DA_2A_1

Si noti che abbiamo raggruppato tra loro quelle parole che differiscono solo per la posizione degli indici, cioè che, tolti gli indici, forniscono lo stesso anagramma della parola ADA.
Ovviamente contare gli anagrammi delle parole senza indici è come contare quanti sono i raggruppamenti.
Osserviamo che:

$\boxed{1}$ In ogni raggruppamento ci sono tanti anagrammi di A_1DA_2 quanti sono i modi di permutare gli indici tra le 2 lettere A, cioè 2.

$\boxed{2}$ Il numero di raggruppamenti si ottiene dividendo il numero totale di anagrammi di A_1DA_2 per il numero di quelli che stanno in un raggruppamento. Nel nostro caso $6:2$, cioè 3.

Abbiamo quindi trovato che gli anagrammi di ADA sono 3.
Il metodo usato, che può sembrarci inutilmente complicato, ha il vantaggio di potersi applicare anche ai problemi successivi:

PROBLEMA 3 QUANTI SONO GLI ANAGRAMMI DI MAMMA?

SVOLGIMENTO Procediamo come prima, cioè prendiamo la parola:

$$M_1A_1M_2M_3A_2$$

i cui anagrammi sono $5!$, cioè 120.
Gli indici tra le 3 lettere M si possono permutare in $3!$ modi e quelli tra le 2 lettere A in $2!$ modi, quindi in tutto gli indici possono essere permutati in $3!\cdot 2!$ modi, cioè in 12 modi.

Immaginiamo di scrivere tutti gli anagrammi di $M_1A_1M_2M_3A_2$ e di raggruppare tra loro quelli che differiscono solo per gli indici

IN TUTTO GLI ANAGRAMMI SONO 5! CIOÈ 120

IN OGNI RAGGRUPPAMENTO GLI ANAGRAMMI SONO 2!·3!, CIOÈ 12

$A_1A_2M_1M_2M_3$		$M_1A_1M_2M_3A_2$	
$A_2A_1M_1M_2M_3$		$M_1A_2M_2M_3A_1$	
$A_1A_2M_1M_3M_2$	....	$M_1A_1M_3M_2A_2$	...
⋮		⋮	
$A_2A_1M_3M_2M_1$		$M_3A_2M_2M_1A_1$	

Il numero dei raggruppamenti quindi è $\frac{120}{12}$, cioè 10.
Quindi MAMMA ha 10 anagrammi.

PROBLEMA 4 QUANTI SONO GLI ANAGRAMMI DI NINNANANNA?

SVOLGIMENTO Gli anagrammi di:

$$N_1\,I\,N_2N_3A_1N_4A_2N_5N_6A_3$$

sono 10!. Gli indici delle 6 lettere N si possono permutare in 6! modi e quelli delle 3 lettere A in 3! modi, quindi a ogni anagramma senza indici corrispondono 6!·3! anagrammi con gli indici, quindi gli anagrammi senza indici sono:

$$\frac{10!}{6!\cdot 3!} = \frac{10\cdot \cancel{9}^{3}\cdot \cancel{8}^{4}\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1} = 10\cdot 84 = 840$$

GENERALIZZAZIONE È facile convincersi che il metodo utilizzato nei problemi 2, 3 e 4 funziona sempre. Ad esempio se in una parola ci sono 17 lettere: 2 lettere A, 4 lettere B, 1 lettera C e 10 lettere D, allora il numero di anagrammi è:

$$\frac{17!}{2!\cdot 4!\cdot 1!\cdot 10!}=\frac{17\cdot \cancel{16}^{4}\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot \cancel{12}\cdot 11\cdot \cancel{10!}}{\cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{4\cdot 3\cdot 2}\cdot 1\cdot 1\cdot \cancel{10!}}=17\cdot 4\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 11=2042040$$

In generale, visto che gli oggetti da permutare potrebbero anche non essere lettere si usa il termine: PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE.

OSSERVAZIONE Nei problemi precedenti abbiamo imparato a contare gli anagrammi di una parola qualsiasi. Nei problemi successivi vedremo che questo ci basta per dare una risposta a tutti i possibili conteggi della combinatoria elementare. Infatti la tipica strategia di soluzione sarà quella di trovare una parola tale che l'insieme dei suoi anagrammi sia in corrispondenza biunivoca con l'insieme degli oggetti da contare. L'esempio più semplice è quello delle COMBINAZIONI SEMPLICI, che vediamo nel problema 5.

PROBLEMA 5 IN CLASSE CI SONO 8 STUDENTI: ADA, UGO, PIO, LEO, IDA, ISA LUCA E ANNA. IN QUANTI MODI POSSO SCEGLIERNE 3 PER INTERROGARLI?

SVOLGIMENTO SE ABBIAMO UNA LISTA CON I NOMI DEGLI STUDENTI, PER RAPPRESENTARE UNA SCELTA POSSIAMO IMMAGINARE DI SCRIVERE UNA S DAVANTI AL NOME DI CHI È SCELTO E UNA N DAVANTI AL NOME DI CHI È NON LO È. AD ESEMPIO, IN FIGURA È RAPPRESENTATA LA SCELTA {IDA, ADA, LUCA}.

FIGURA

S	ADA
N	UGO
N	PIO
N	LEO
S	IDA
N	ISA
S	LUCA
N	ANNA

CHIARAMENTE CONTARE LE POSSIBILI SCELTE EQUIVALE A CONTARE IN QUANTI MODI POSSO METTERE LE 3 S E LE 5 N DAVANTI AGLI 8 NOMI, CIOÈ CONTARE QUANTI SONO GLI ANAGRAMMI DI UNA PAROLA CHE HA 3 S E 5 N. ABBIAMO IMPARATO CHE SONO:

$$\frac{8!}{5!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1} = 56$$

QUINDI LE POSSIBILI SCELTE SONO 56.

GENERALIZZAZIONE (COMBINAZIONI SEMPLICI DI n OGGETTI DELLA CLASSE k)

SE IN GENERALE HO n OGGETTI E MI SI CHIEDE DI CONTARE IN QUANTI MODI POSSO SCEGLIERNE k, PROCEDENDO COME NEL PROBLEMA 5 TROVO CHE IL NUMERO DI MODI È:

$$\boxed{\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}}$$

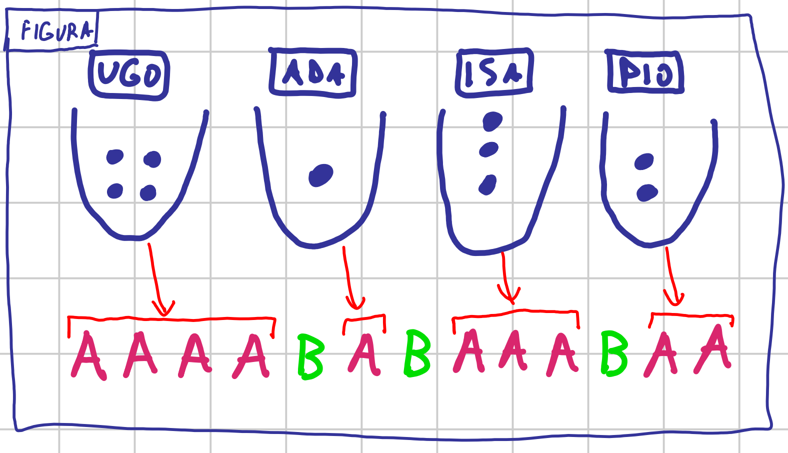
QUESTA ESPRESSIONE COMPARE COSÌ SPESSO IN COMBINATORIA CHE LA SI INDICA CON UN SIMBOLO TUTTO SUO, SI PONE CIOÈ:

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

AD ESEMPIO $\binom{8}{3}$ SIGNIFICA $\frac{8!}{3!\cdot 5!}$.

PROBLEMA 6 UN PAPÀ HA 4 FIGLI (UGO, ADA, ISA, PIO) E 10 CARAMELLE, TRA LORO INDISTINGUIBILI. IN QUANTI MODI PUÒ DISTRIBUIRLE AI SUOI 4 FIGLI? (SONO AMMESSI TUTTI I MODI, ANCHE QUELLI INGIUSTI COME DARE TUTTE LE CARAMELLE A UGO E NESSUNA A TUTTI GLI ALTRI).

SVOLGIMENTO IMMAGINIAMO LA DISTRIBUZIONE DI CARAMELLE IN CUI NE DIAMO 4 A UGO, 1 AD ADA, 3 A ISA E 2 A PIO. A PARTIRE DA ESSA (VEDI FIGURA) POSSIAMO COSTRUIRE UNA PAROLA DI 13 LETTERE (10 A E 3 B)



CON LA SEGUENTE REGOLA: PARTENDO DA SINISTRA (CIOÈ DA UGO) OGNI VOLTA CHE INCONTRIAMO UNA CARAMELLA SCRIVIAMO A E OGNI VOLTA CHE PASSIAMO DA UN BIMBO ALL'ALTRO SCRIVIAMO B.

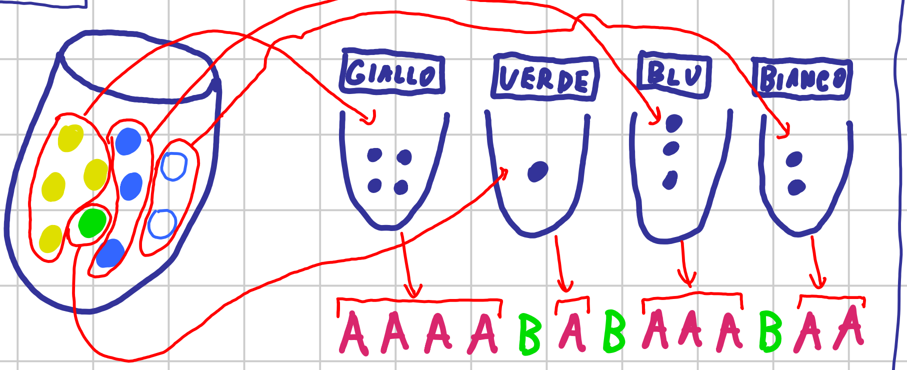
CI SI CONVINCE FACILMENTE CHE L'INSIEME DI TUTTE LE DISTRIBUZIONI DI CARAMELLE È IN CORRISPONDENZA BIUNIVOCA CON L'INSIEME DI TUTTI GLI ANAGRAMMI DI UNA PAROLA FATTA DI 10 A E 3 B CHE SONO:

$$\frac{13!}{10!\cdot 3!} = \frac{13\cdot \overset{2}{\cancel{12}}\cdot 11\cdot \cancel{10!}}{\cancel{10!}\cdot \cancel{3\cdot 2}\cdot 1} = 26\cdot 11 = 286$$

PROBLEMA 7 HO PALLINE DI 4 COLORI DIVERSI: GIALLO, VERDE BLU E BIANCO. DI CIASCUN TIPO NE HO MOLTISSIME. IN QUANTI MODI POSSO SCEGLIERNE 10 DA METTERE IN UN SACCHETTO?

SVOLGIMENTO È SEMPRE POSSIBILE (VEDI FIGURA) ASSOCIARE IN MODO UNIVOCO AD OGNI SACCHETTO DI 10 PALLINE UN'OPPORTUNA DISTRIBUZIONE DI 10 CARAMELLE A 4 BIMBI AVENTI GLI STESSI NOMI DEI COLORI.

FIGURA



LA REGOLA USATA È DI DARE A CIASCUN BIMBO TANTE CARAMELLE QUANTE SONO LE PALLINE DEL SACCHETTO IL CUI COLORE È UGUALE AL NOME DEL BIMBO.

SI OTTIENE CHE L'INSIEME DI TUTTI I MODI DI SCEGLIERE LE 10 PALLINE È IN CORRISPONDENZA BIUNIVOCA CON L'INSIEME DEI MODI DI DISTRIBUIRE LE CARAMELLE. QUINDI LA RISPOSTA È LA STESSA DEL PROBLEMA 6: 286.

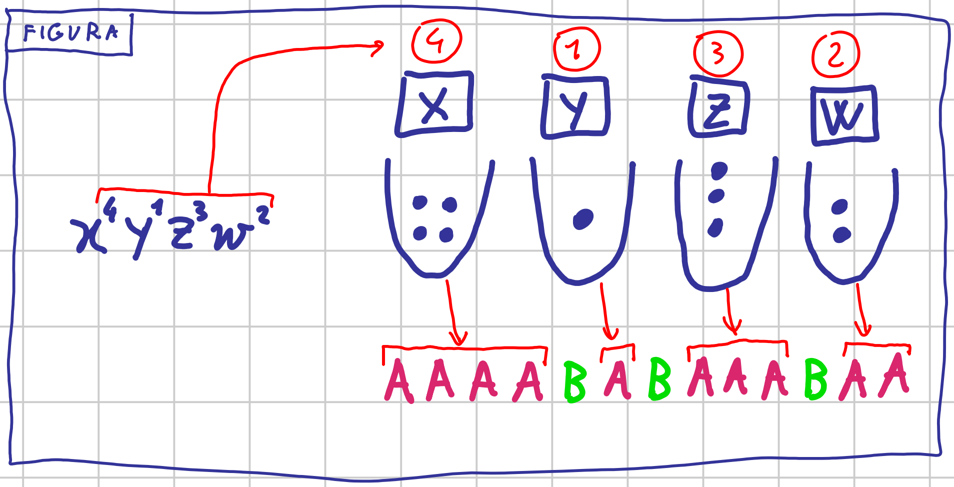
PROBLEMA 8 UN POLINOMIO OMOGENEO DI GRADO 10 IN 4 VARIABILI È RIDOTTO AI MINIMI TERMINI, CIOÈ SONO STATI SOMMATI TRA LORO TUTTI I TERMINI SIMILI. QUANTI SONO AL MASSIMO I SUOI TERMINI?

SVOLGIMENTO SI TRATTA DI CONTARE QUANTE SONO LE PARTI LETTERALI DEL TIPO:

$$x^{\alpha}\cdot y^{\beta}\cdot z^{\gamma}\cdot w^{\delta}$$

CON

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=10$$

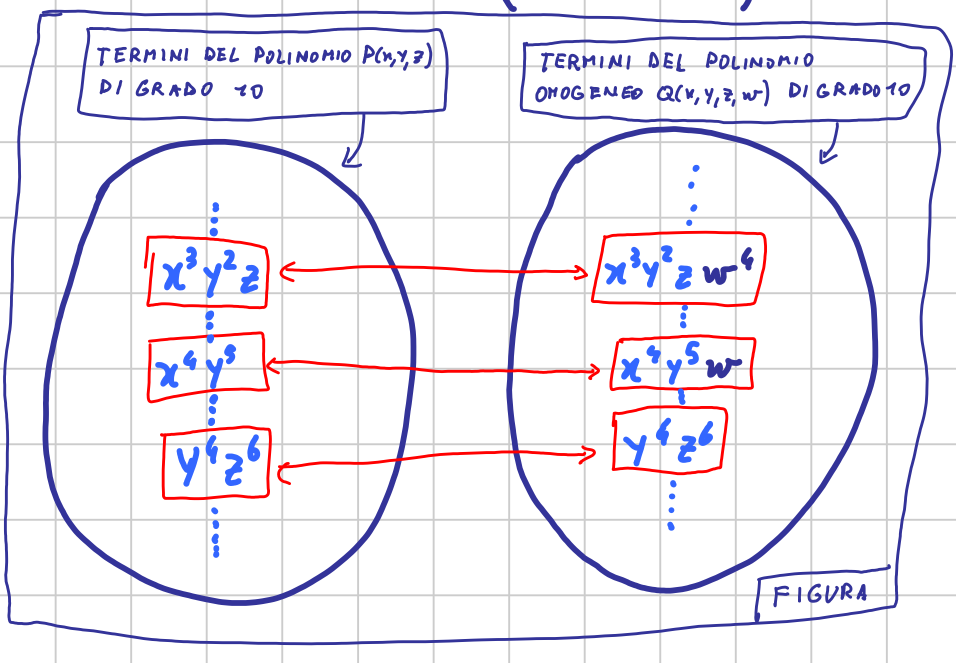


ANCHE QUI SCOPRIAMO CHE OGNI PARTE LETTERALE PUÒ ESSERE MESSA IN CORRISPONDENZA CON UN OPPORTUNO MODO DI DISTRIBUIRE 10 CARAMELLE A 4 BIMBI I CUI NOMI SONO x, y, z E w (VEDI FIGURA).
QUINDI ANCHE QUESTO PROBLEMA È SOLO UNA RIFORMULAZIONE DEL PROBLEMA 6 E LA SOLUZIONE È ANCORA 286.

PROBLEMA 9 QUANTI TERMINI PUÒ AVERE AL MASSIMO UN POLINOMIO DI GRADO 10, IN 3 VARIABILI, RIDOTTO AI MINIMI TERMINI?

SVOLGIMENTO È ESATTAMENTE COME CONTARE I TERMINI DI UN POLINOMIO DELLO STESSO GRADO, MA OMOGENEO E CON UNA VARIABILE IN PIÙ, VISTO CHE AD OGNI TERMINE DEL TIPO $x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}$, CON $\alpha+\beta+\gamma\leq 10$ SI PUÒ FAR CORRISPONDERE IN MODO UNIVOCO IL TERMINE $x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}w^{\delta}$ CON $\delta=10-(\alpha+\beta+\gamma)$ (VEDI FIGURA)

QUINDI IL PROBLEMA È ANCORA UNA VOLTA EQUIVALENTE AL PROBLEMA 6 E QUINDI LA RISPOSTA È ANCORA 286



PROBLEMA PER CASA SPIEGARE IN CHE MODO LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA 9 PUÒ FARCI INDOVINARE (E DIMOSTRARE) LA FORMULA:

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\dots+\binom{10}{2}+\binom{11}{2}+\binom{12}{2}=\binom{13}{3}$$

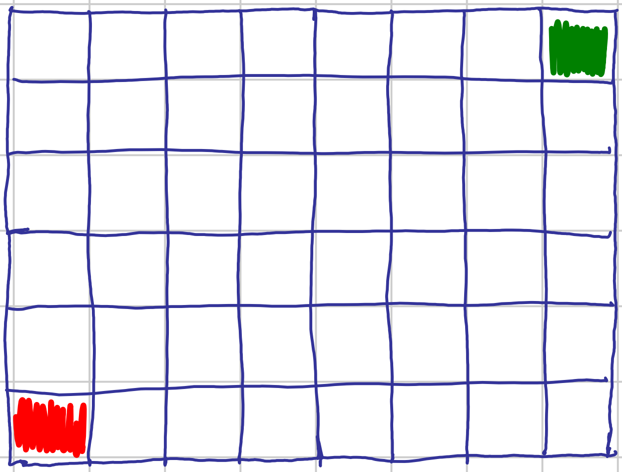
SUGGERIMENTO SIA IL PRIMO CHE IL SECONDO MEMBRO DELL'UGUAGLIANZA DA DIMOSTRARE CI DANNO LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA 9 PERCHÉ....

GENERALIZZAZIONE SE GENERALIZZIAMO IL PROBLEMA 7, PRENDENDO n COLORI ANZICHÉ 4 E k PALLINE ANZICHÉ 10, OTTENIAMO QUELLE CHE VENGONO CHIAMATE COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE DI n OGGETTI DELLA CLASSE k.

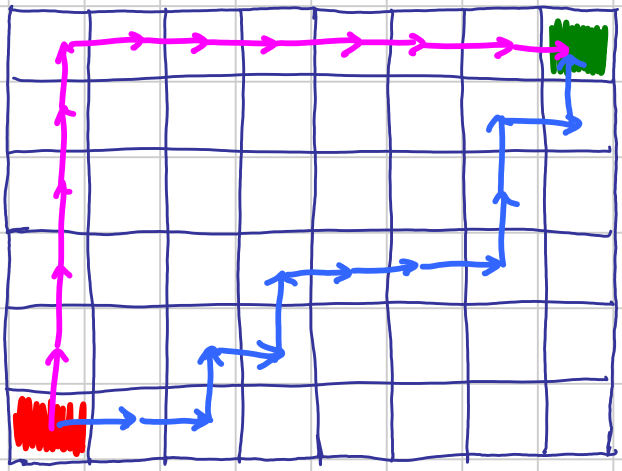
OVVIAMENTE CONTINUA A FUNZIONARE LO STESSO PROCEDIMENTO RISOLUTIVO, CHE CI FORNISCE COME SOLUZIONE:

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\cdot k!}$$ O, EQUIVALENTEMENTE: $$\binom{n+k-1}{n-1}$$ O ANCORA: $$\binom{n+k-1}{k}$$

PROBLEMA 10 UNA PULCE SALTA TRA LE CASELLE DI UNA SCACCHIERA 6×8 (VEDI FIGURA). SONO AMMESSI SOLO SALTI TRA CASELLE CONTIGUE (CIOÈ AVENTI UN LATO IN COMUNE) CHE SIANO DIRETTI DA SINISTRA A DESTRA O DAL BASSO VERSO L'ALTO. SE LA PULCE È INIZIALMENTE NELLA CASELLA ROSSA, CON QUANTI DIVERSI PERCORSI PUÒ ARRIVARE A QUELLA VERDE?



SVOLGIMENTO SE IMMAGINIAMO DI INDICARE CON D I SALTI VERSO DESTRA E CON A I SALTI VERSO L'ALTO OGNI PERCORSO DALLA CASELLA ROSSA A QUELLA VERDE PUÒ ESSERE RAPPRESENTATO CON UNA PAROLA FATTA DI 7 D E 5 A. AD ESEMPIO IL PERCORSO AZZURRO CORRISPONDE ALLA PAROLA:



D D A D A D D D A A D A

MENTRE QUELLO ROSA CORRISPONDE ALLA PAROLA:

A A A A A D D D D D D D

QUINDI CONTARE QUANTI SONO I PERCORSI EQUIVALE A CONTARE QUANTE SONO LE PAROLE DI 12 LETTERE, CONTENENTI 5 A E 7 D, CHE SAPPIAMO ESSERE:

$$\frac{12!}{7!\cdot 5!} = \frac{\cancel{12}\cdot 11\cdot \cancel{10}\cdot 9\cdot 8\cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1} = 11\cdot 9\cdot 8 = 792$$

$\boxed{\text{PROBLEMA 11}}$ QUAL È IL COEFFICIENTE DI x^2y^4 NELLO SVILUPPO DI $(x+y)^6$?

$\boxed{\text{SVOLGIMENTO}}$ QUANDO SVOLGO IL PRODOTTO $(x+y)^6$, CIOÈ:

$$(*) \quad (x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)$$

STO, DI FATTO, FACENDO LA SOMMA DI TUTTI I PRODOTTI POSSIBILI AVENTI UN TERMINE PRESO DA CIASCUNO DEI 6 FATTORI.

QUELLO CHE MI VIENE CHIESTO EQUIVALE A CONTARE QUANTI DI TALI PRODOTTI SONO UGUALI A x^2y^4.

PER RISPONDERE, OSSERVIAMO CHE CIÒ ACCADE SE E SOLO SE DA 2 FATTORI SCELGO x E DAGLI ALTRI 4 SCELGO y, QUINDI BASTERÀ CONTARE QUANTE SONO QUESTE SCELTE.

PER CONTARLE OSSERVO CHE SI PUÒ FAR CORRISPONDERE IN MODO UNIVOCO OGNI SCELTA A UNA PAROLA FATTA DI 2 X E 4 Y COSTRUITA SECONDO LA SEGUENTE REGOLA:

$\boxed{\text{LA } i\text{-ESIMA LETTERA DELLA PAROLA È UGUALE ALLA LETTERA SCELTA DALL'}i\text{-ESIMO FATTORE DI } (*)}$

AD ESEMPIO, SE STO MOLTIPLICANDO LE x DEL SECONDO E QUARTO FATTORE CON LE y DEGLI ALTRI FATTORI, LA PAROLA CHE CORRISPONDE A TALE PRODOTTO È YXYXYY.

IN CONCLUSIONE PER CONTARE QUANTI SONO I PRODOTTI CHE DANNO COME RISULTATO x^2y^4 BASTA CONTARE QUANTI SONO GLI ANAGRAMMI DI UNA PAROLA FATTA DI 2 LETTERE X E 4 LETTERE Y, CHE SONO:

$$\frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{4!}} = 3\cdot 5 = 15$$

PROBLEMA 12 QUAL È IL COEFFICIENTE DI $x^8y^3z^4$ NELLO SVILUPPO DI $(x+y+z)^{15}$?

SVOLGIMENTO POICHÉ $(x+y+z)^{15}$ È

$$(\otimes) \qquad \underbrace{(x+y+z)\cdot(x+y+z)\cdot\ldots\ldots\cdot(x+y+z)}_{15 \text{ VOLTE}}$$

RAGIONANDO COME NEL **PROBLEMA 11** SI DEDUCE CHE, SVILUPPANDO $(\otimes)$, I PRODOTTI CHE DANNO COME RISULTATO $x^8\cdot y^3\cdot z^4$ SONO TANTI QUANTI GLI ANAGRAMMI DI UNA PAROLA FATTA DI 8 LETTERE X, 3 LETTERE Y E 4 LETTERE Z, CHE SONO:

$$\frac{15!}{8!\cdot 3!\cdot 4!} = \frac{\overset{5}{\cancel{15}}\cdot \overset{7}{\cancel{14}}\cdot 13\cdot \cancel{12}\cdot 11\cdot \overset{5}{\cancel{10}}\cdot 9\cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{4\cdot 3}\cdot \cancel{2}\cdot 1} = 5\cdot 7\cdot 13\cdot 11\cdot 5\cdot 9 = 225'225$$

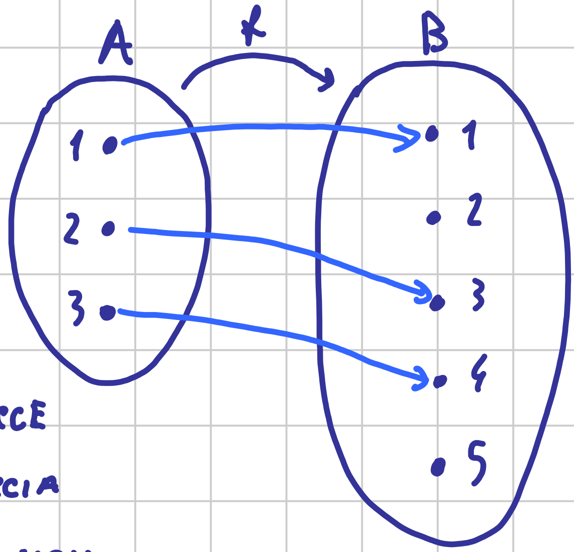
QUINDI IL COEFFICIENTE DI $x^8\cdot y^3\cdot z^4$ È 225'225.

GENERALIZZAZIONE IL PROCEDIMENTO USATO NEL PROBLEMA 11 FUNZIONAVA PIÙ IN GENERALE PER CERCARE IL COEFFICIENTE DI x^ky^{n-k} NELLO SVILUPPO DI $(x+y)^n$ E FORNIVA COME RISULTATO $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, CIOÈ $\binom{n}{k}$.

ANALOGAMENTE, PROCEDENDO COME NEL PROBLEMA 12, SI TROVA CHE NELLO SVILUPPO DI $(x+y+z)^n$ IL COEFFICIENTE DI $x^\alpha \cdot y^\beta \cdot z^\gamma$, CON $\alpha+\beta+\gamma=n$, È DATO DA $\dfrac{n!}{\alpha!\cdot\beta!\cdot\gamma!}$.

PROBLEMA 13 DATI GLI INSIEMI $A=\{1,2,3\}$ E $B=\{1,2,3,4,5\}$, DIRE QUANTE SONO LE FUNZIONI $f:A\to B$ STRETTAMENTE CRESCENTI. ($f:A\to B$ SI DICE STRETTAMENTE CRESCENTE SE $m<n \Rightarrow f(m)<f(n)$)

SVOLGIMENTO SI TRATTA DI STABILIRE IN QUANTI MODI POSSO FAR PARTIRE 3 FRECCE DAI 3 ELEMENTI DI A IN MODO CHE L'ORDINAMENTO DELLE "PUNTE" COINCIDA CON L'ORDINAMENTO DELLE CODE. AD ESEMPIO LE TRE FRECCE IN FIGURA VANNO BENE, MA SE LA FRECCIA CHE PARTE DA 3 ANDASSE IN 2 O IN 3 NON ANDREBBE PIÙ BENE.



L'OSSERVAZIONE DECISIVA PER RISOLVERE IL PROBLEMA È NOTARE CHE UNA VOLTA SCELTI I 3 ELEMENTI DI B IN CUI MANDARE LE PUNTE DELLE FRECCE, C'È OVVIAMENTE UN SOLO MODO DI FARLO SE SI VUOLE CHE LE PUNTE CONSERVINO L'ORDINAMENTO DELLE CODE. CIÒ SIGNIFICA CHE PER CONTARE LE FUNZIONI STRETTAMENTE CRESCENTI BASTA CONTARE IN QUANTI MODI POSSO SCEGLIERE 3 ELEMENTI TRA I 5 DI B. SAPPIAMO GIÀ (PROBLEMA 5) CHE SI PUÒ FARE IN $\binom{5}{3}$ MODI, CIOÈ IN 10 MODI.

QUINDI LE FUNZIONI STRETTAMENTE CRESCENTI DA A A B SONO 10.

PROBLEMA PER CASA PRESI A E B COME NEL PROBLEMA 13, DIRE

QUANTE SONO LE $f: A \to B$ DEBOLMENTE CRESCENTI, CIOÈ TALI CHE $m < n \Rightarrow f(m) \leq f(n)$.

$\boxed{\text{SUGGERIMENTO}}$ LE $f: A \to B$ CHE SONO DEBOLMENTE CRESCENTI SONO TANTE QUANTI I MODI DI DARE 3 CARAMELLE A 5 BIMBI PERCHÉ....

NUOVO ARGOMENTO

PRINCIPIO DEL BUCO DEL PICCIONE

PRINCIPIO SE HO PIÙ PICCIONI CHE BUCHI E OGNI PICCIONE VA IN UN BUCO, ALLORA C'È ALMENO UN BUCO IN CUI SONO ANDATI 2 PICCIONI

PROBLEMA 14 IN UN BAULE CI SONO 20 CALZINI ROSSI, 20 VERDI, 20 BLU E 20 GIALLI. ME NE SERVONO 2 DELLO STESSO COLORE MA C'È BUIO E NON SI RIESCE A DISTINGUERE I COLORI E QUINDI LI PRENDO A CASO. QUAL È LA MINIMA QUANTITÀ DI CALZINI CHE DEVO PRENDERE PER ESSERE SICURO CHE TRA ESSI CE NE SIANO 2 DELLO STESSO COLORE?

SVOLGIMENTO 4 CALZINI NON BASTANO PERCHÉ POTREBBERO ESSERE TUTTI DI COLORI DIVERSI. INVECE 5 BASTANO PERCHÉ, ESSENDO I COLORI SOLO 4, DEI 5 CALZINI ALMENO DUE SARANNO DELLO STESSO COLORE.
(COME AVERE 5 PICCIONI, CIOÈ I CALZINI, CHE VANNO IN 4 BUCHI, CIOÈ I COLORI)
QUINDI IL MINIMO NUMERO DI CALZINI CHE DEVO PRENDERE È 5.

PROBLEMA 15 ANZICHÉ PREDERE SOLO 2 PICCIONI CON UNA FAVA, LUCA FA MOLTO MEGLIO: NE PRENDE 253 CON 15 FAVE. QUAL È IL MASSIMO n TALE CHE C'È ALMENO UNA DELLE 15 FAVE CON CUI HA PRESO ALMENO n PICCIONI.

SVOLGIMENTO POICHÉ $253 : 15 = 16$ COL RESTO DI 13, POSSIAMO DIRE CHE $n \geq 18$ NON VA BENE PERCHÉ LUCA POTREBBE AVER PRESO 17 PICCIONI CON 13 FAVE E 16 PICCIONI CON LE 2 FAVE RIMANENTI.

D'ALTRA PARTE $n=17$ VA BENE: NON PUÒ AVER PRESO MENO DI 17 PICCIONI CON CIASCUNA DELLE 15 FAVE PERCHÈ ALTRIMENTI I PICCIONI PRESI SAREBBERO AL MASSIMO $15 \cdot 16$, CIOÈ 240.
QUINDI IL MINIMO n TALE CHE ESISTE ALMENO UNA FAVA CON CUI HA PRESO ALMENO n PICCIONI È $n=17$

PROBLEMA 16 UN INSIEME A CONTIENE SOLO NUMERI DI 2 CIFRE ED HA LA SEGUENTE PROPRIETÀ: PRESI COMUNQUE 2 NUMERI CHE STANNO IN A, LA LORO DIFFERENZA NON È MAI UN NUMERO CON ENTRAMBE LE CIFRE UGUALI. QUAL È IL MASSIMO NUMERO DI ELEMENTI CHE PUÒ AVERE A?

SVOLGIMENTO È FACILE ESIBIRE UN CASO IN CUI A HA 11 ELEMENTI:

$$A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

IN QUESTO CASO A HA SICURAMENTE LA PROPRIETÀ RICHIESTA PERCHÉ LA DIFFERENZA DI 2 NUMERI CHE STANNO IN A VALE AL MASSIMO 10.
MOSTRIAMO CHE NON CI POSSONO MAI ESSERE 12 O PIÙ DI 12.
INFATTI, SE A CONTENESSE ALMENO 12 NUMERI, ALMENO 2 DI ESSI DOVREBBERO DARE LO STESSO RESTO QUANDO DIVISI PER 11 (QUESTO PERCHÈ CI SONO SOLO 11 CASI POSSIBILI PER IL RESTO).
I DUE NUMERI CHE DIVISI PER 11 DANNO LO STESSO RESTO HANNO OVVIAMENTE LA DIFFERENZA CHE È MULTIPLA DI 11 E QUINDI È UN NUMERO CON LE 2 CIFRE UGUALI. (ASSURDO)
QUINDI A NON PUÒ MAI CONTENERE PIÙ DI 11 NUMERI.
IL MASSIMO NUMERO DI ELEMENTI DI A È QUINDI 11.

OSSERVAZIONE IN QUESTO PROBLEMA I PICCIONI ERANO GLI ELEMENTI DI A E I BUCHI ERANO I POSSIBILI RESTI DELLA DIVISIONE PER 11.
