

Stage Urbi et Orbi - Lez. 3

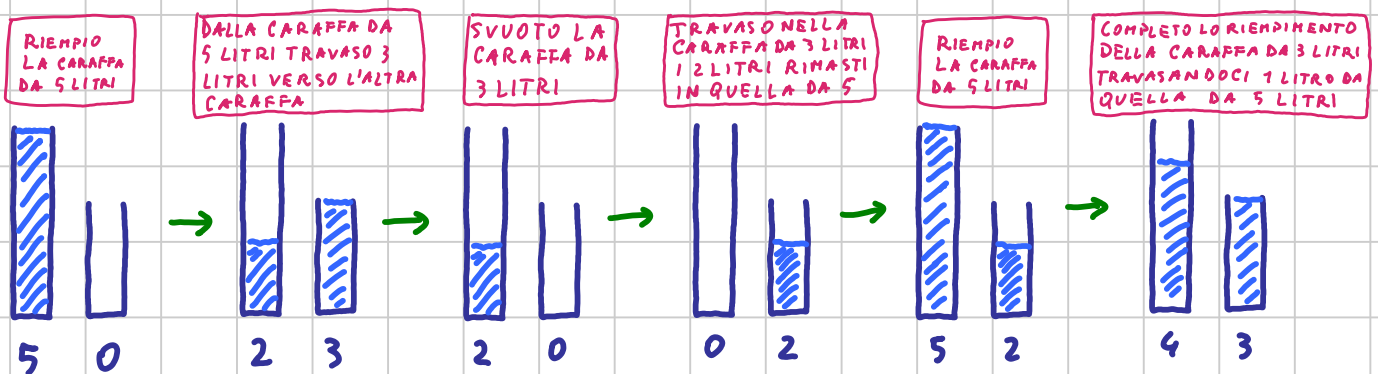
Titolo nota

9 novembre 2018 (15.00-18.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

EQUAZIONI DIOFANTEE LINEARI

PROBLEMA 0 HO UNA CARAFFA DA 5 LITRI E UNA DA 3 LITRI E HO A DISPOSIZIONE UNA VASCA DOVE PRENDERE TANTA ACQUA QUANTA NE VOGLIO. DEVO PRENDERNE ESATTAMENTE 4 LITRI. COME FACCIO?

SOLUZIONE ECCO UNA POSSIBILE SEQUENZA DI AZIONI PER OTTENERE 4 LITRI:



ALLA FINE DI QUESTE OPERAZIONI NELLA CARAFFA DA 5 LITRI MI RIMANGONO ESATTAMENTE 4 LITRI. RIASSUMENDO: ABBIAMO RIEMPITO 2 VOLTE LA CARAFFA DA 5 LITRI E GLI ABBIAMO TOLTO 2 VOLTE LA QUANTITÀ DI 3 LITRI. ALLA FINE IN ESSA CI SIAMO RITROVATI $2 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 4$ LITRI.

OSSERVAZIONE 1 LO STRUMENTO ALGEBRICO GIUSTO PER RISOLVERE QUESTO TIPO DI PROBLEMI SONO LE EQUAZIONI DIOFANTEE: COME FACCIAMO AD OTTENERE 4 USANDO x VOLTE 5 E y VOLTE 3? DETTO ALGEBRICAMENTE: COME BISOGNA SCEGLIERE x E y INTERI IN MODO CHE

$$5x + 3y = 4 \quad ?$$

CON LA FORZA BRUTA ABBIAMO SCOPERTO CHE UNA POSSIBILE SOLUZIONE È $(x, y) = (2, -2)$ CHE EQUIVALE APPUNTO A RIEMPIRE

2 VOLTE LA CARAFFA DA 5 E TOGLIERGLI 2 VOLTE LA CARAFFA DA 3.

PROVANDO ANCORA PERÒ TROVIAMO ALTRE SOLUZIONI: $(-1, 3)$, $(5, -7)$, $(32, -52)$, ECC. COME FACCIAMO A TROVARLE TUTTE?

L'IDEA DI BASE È CHE 3 CARAFFE DA 5 LITRI VALGONO QUANTO 5 CARAFFE DA 3 LITRI, QUINDI DOPO AVER TROVATO LA SOLUZIONE $(2, -2)$, NE POSSO TROVARE TANTISSIME ALTRE AGGIUNGENDO 3 ALLA x E TOGLIENDO 5 ALLA y , LO STESSO NUMERO DI VOLTE.

DETTO ALGEBRICAMENTE, DAL FATTO CHE $(2, -2)$ È SOLUZIONE DEDUCCO CHE SONO SOLUZIONI TUTTE LE COPPIE DEL TIPO:

$$(*) \quad (2 + 3k, -2 - 5k)$$

DOVE A k POSSO DARE QUALSIASI VALORE INTERO.

AD ESEMPIO LE SOLUZIONI $(-1, 3)$, $(5, -7)$ E $(32, -52)$ SI OTTENGONO RISPETTIVAMENTE PER $k = -1$, $k = 1$ E $k = 10$.

IN REALTÀ POSSIAMO ESSERE ANCORA PIÙ PRECISI: LE COPPIE DI TIPO $(*)$ NON SOLO VANNO BENE, MA SONO LE UNICHE AD ANDAR BENE. PER COMODITÀ RIASSUMIAMO (E DIMOSTRIAMO) TUTTO CIÒ CHE ABBIAMO RACCONTATO FINORA NEL SEGUENTE:

TEOREMA 1 DATA L'EQUAZIONE DIOFANTEA:

$$(\bullet) \quad 5x + 3y = 4$$

LE SUE SOLUZIONI SONO TUTTE E SOLE LE COPPIE DEL TIPO

$$(\times) \quad (2 + 3k, -2 - 5k) \quad \text{CON } k \text{ INTERO.}$$

DIMOSTRAZIONE LA VERIFICA CHE TUTTE LE COPPIE DI TIPO $(\times)$ VANNO BENE È SEMPLICE. INFATTI SOSTITUENDO $(\times)$ IN $(\bullet)$ SI OTTIENE:

$$5(2 + 3k) + 3(-2 - 5k) = 10 + \cancel{15k} - 6 - \cancel{15k} = 10 - 6 = 4$$

RIMANE DA VERIFICARE CHE OLTRE A $(\times)$ NON CE NE SONO ALTRE.

A TALE SCOPO MOSTRIAMO CHE SE UNA COPPIA (x_1, y_1) È SOLUZIONE, ALLORA DEVE NECESSARIAMENTE ESSERE DEL TIPO (x) .

INFATTI SE (x_1, y_1) È SOLUZIONE ABBIAMO:

$$5x_1 + 3y_1 = 4 \quad \leftarrow \text{PERCHÉ } (x_1, y_1) \text{ È SOLUZIONE}$$

$$5 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) = 4 \quad \leftarrow \text{PERCHÉ } (2, -2) \text{ È SOLUZIONE}$$

SOTTRAENDO MEMBRO A MEMBRO SI OTTIENE:

$$5(x_1 - 2) + 3(y_1 + 2) = 0$$

CIOÈ:

$$(\otimes) \quad 5(x_1 - 2) = -3(y_1 + 2)$$

IL SECONDO MEMBRO È OVVIAMENTE UN MULTIPLO DI 3, MA ALLORA DEVE ESSERLO ANCHE IL PRIMO MEMBRO, MA ESSENDO 3 E 5 PRIMI TRA LORO, L'UNICO MODO CHE HA IL PRIMO MEMBRO DI ESSERE UN MULTIPLO DI 3 È CHE LO SIA $x_1 - 2$, CIOÈ CHE SI ABBIAM:

$$x_1 - 2 = 3k \quad \text{CON } k \text{ INTERO}$$

CIOÈ CHE SIA:

$$(\oplus) \quad x_1 = 2 + 3k \quad \text{CON } k \text{ INTERO}$$

PER TROVARE y_1 BASTA ORA SOSTITUIRE $(\oplus)$ IN $(\otimes)$, OTTENENDO:

$$5(\cancel{2} + 3k - \cancel{2}) = -3(y_1 + 2)$$

DA CUI SEGUE:

$$\cancel{5}k = -\cancel{3}(y_1 + 2)$$

CIOÈ:

$$y_1 = -2 - 5k$$

ABBIAMO QUINDI TROVATO CHE SE (x_1, y_1) È SOLUZIONE, ALLORA DEVE ESSERE:

$$x_1 = 2 + 3k \quad \text{E} \quad y_1 = -2 - 5k \quad \text{CON } k \text{ INTERO.}$$

CIO' SIGNIFICA CHE (x_1, y_1) È NECESSARIAMENTE DELLA FORMA (x) . QUESTO COMPLETA LA DIMOSTRAZIONE.

OSSERVAZIONE 2

IL MECCANISMO IN BASE AL QUALE, UNA VOLTA TROVATA UNA SOLUZIONE, TUTTE LE ALTRE SI TROVANO AGGIUNGENDO E TOGLIENDO GLI OPPORTUNI MULTIPLI ALLA SOLUZIONE TROVATA, HA VALIDITÀ GENERALE. INFATTI, PROCEDENDO IN MODO DEL TUTTO ANALOGO, SI PUÒ DIMOSTRARE IL SEGUENTE:

TEOREMA 2

DATA L'EQUAZIONE DIOFANTEA:

$$ax + by = c$$

CON a E b PRIMI TRA LORO (CIOÈ SENZA FATTORI IN COMUNE), SE DI ESSA CONOSCIAMO GIÀ UNA SOLUZIONE (x_0, y_0) , ALLORA TUTTE LE ALTRE SOLUZIONI SI OTTENGONO DALLA FORMULA:

$$(x_0 + bk, y_0 - ak)$$

AL VARIARE DI TUTTI I VALORI INTERI DI k .

OSSERVAZIONE 3

CI RIFERIREMO SPESSO AL MECCANISMO DESCRITTO NEI TEOREMI 1 E 2 CON LA FRASE: "TROVATA UNA SOLUZIONE, TROVATE TUTTE", NEI PROSSIMI PROBLEMI IMPAREREMO COME SI FA A TROVARE LA PRIMA SOLUZIONE, IN MODO POI DA TROVARLE TUTTE.

PROBLEMA 1

UNA PULCE SALTA SUI PUNTI DELL'ASSE x . PARTE DA $x=0$ E VUOLE ARRIVARE A $x=3$ FACENDO SOLO SALTII LUNGI 387 UNITÀ O 32 UNITÀ. COME PUÒ FARE?

SOLUZIONE

SI TRATTA DI OTTENERE UNA LUNGHEZZA DI 3 UNITÀ SOMMANDO E SOTTRAENDO (RIPETUTAMENTE) LUNGHEZZE DA 387 E DA 32.

DETTO ALGEBRICAMENTE, SI TRATTA DI ESPRIMERE 3 COME COMBINAZIONE A COEFFICIENTI INTERI DI 387 E 32, CIOÈ DI TROVARE x E y INTERI TALI CHE:

(ϕ)

$$387x + 32y = 3$$

SIAMO FORTUNATI CHE CON QUESTI NUMERI È MOLTO SEMPLICE

PERCHÉ UN RAPIDO CALCOLO MOSTRA CHE:

$$387 : 32 = 12 \quad \text{CON RESTO} = 3$$

QUINDI:

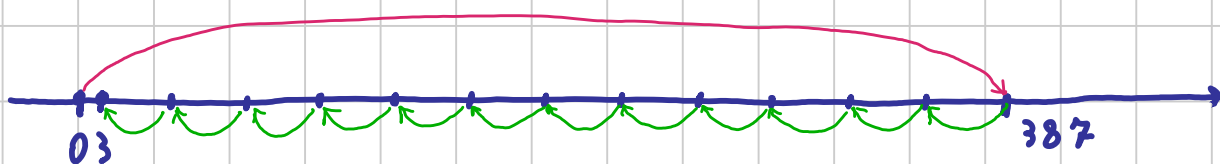
$$387 = 12 \cdot 32 + 3$$

CIOÈ:

$$3 = 1 \cdot 387 - 12 \cdot 32$$

DA CUI SEGUE CHE (ϕ) HA UNA SOLUZIONE DATA DA

$x = 1$ E $y = -12$. CIÒ SIGNIFICA CHE LA PULCE, PARTENDO DA ZERO PUÒ ARRIVARE A 3 FACENDO 13 SALTI: 1 SALTO IN AVANTI LUNGO 387 E 12 SALTI INDIETRO LUNGI 32.



SI NOTI CHE IL MECCANISMO DEL "TROVATO UNO, TROVATI TUTTI" CI PERMETTE DI DIRE CHE $(1, -12)$ NON È L'UNICA SOLUZIONE, MA VANNO BENE TUTTE E SOLE LE COPPIE (x, y) DEL TIPO:

$$(1 + 32k, -12 - 387k) \quad \text{CON } k \text{ INTERO}$$

TUTTAVIA CI SI RENDE SUBITO CONTO CHE $(1, -12)$ È LA SOLUZIONE CHE MINIMIZZA IL NUMERO DI SALTI.

OSSERVAZIONE 4

IN GENERALE, SE $a : b = q$ CON RESTO r , POSSO SEMPRE ESPRIMERE r COME COMBINAZIONE A COEFFICIENTI INTERI DI a E b NEL MODO SEGUENTE:

$$r = 1 \cdot a - q \cdot b$$

ITERANDO IL PROCEDIMENTO (E PENSANDO ALL'ALGORITMO EUCLIDEO) RIUSCIAMO SEMPRE AD ESPRIMERE IN FUNZIONE DI a E b ANCHE IL $\text{MCD}(a, b)$, E QUINDI ANCHE TUTTI I SUOI MULTIPLI.

PROBLEMA 2

UNA PULCE SALTA TRA I PUNTI DELL'ASSE x . PARTENDO DALL'ORIGINE VUOLE ARRIVARE NEL PUNTO 1 FACENDO SOLO SALTI DI LUNGHEZZA 268 O 99. TROVARE

- 1) UN QUALSIASI MODO PER RIVSCIRCI
- 2) UN MODO CHE MINIMIZZI IL NUMERO DI SALTI
- 3) UN MODO CHE MINIMIZZI IL NUMERO DI SALTI MA SOTTO LA CONDIZIONE CHE I SALTI DA 268 SIANO SOLO IN AVANTI.

SOLUZIONE

L'EQUAZIONE DIOFANTEA DA RISOLVERE E:

(*)

$$268x + 99y = 1$$

STAVOLTA PERÒ $268 : 99 = 2$ CON RESTO 70, QUINDI NON SI RIESCE A USARE SUBITO IL TRUCCO DI PRIMA PER SCRIVERE 1 COME COMBINAZIONE A COEFFICIENTI INTERI DI 268 E 99. TUTTAVIA POSSIAMO SCRIVERE LA SEGUENTE SEQUENZA:

$$268, 99, 70, 29, 12, 5, 2, 1$$

DOVE OGNI NUMERO È IL RESTO DELLA DIVISIONE DEI 2 CHE LO PRECEDONO E QUINDI PUÒ ESSERE SCRITTO COME LORO COMBINAZIONE A COEFFICIENTI INTERI. VEDIAMO COME SFRUTTARE QUESTA COSA PER SCRIVERE OGNI NUMERO DELLA SEQUENZA COME COMBINAZIONE DI 268 E 99:

$$268 : 99 = 2, \text{ RESTO } 70 \Rightarrow 70 = 1 \cdot 268 - 2 \cdot 99$$

$$99 : 70 = 1, \text{ RESTO } 29 \Rightarrow 29 = 1 \cdot 99 - 1 \cdot 70 = 1 \cdot 99 - 1 \cdot (1 \cdot 268 - 2 \cdot 99) = 3 \cdot 99 - 1 \cdot 268$$

$$70 : 29 = 2, \text{ RESTO } 12 \Rightarrow 12 = 1 \cdot 70 - 2 \cdot 29 = 1 \cdot (1 \cdot 268 - 2 \cdot 99) - 2 \cdot (3 \cdot 99 - 1 \cdot 268) = 3 \cdot 268 - 8 \cdot 99$$

$$29 : 12 = 2, \text{ RESTO } 5 \Rightarrow 5 = 1 \cdot 29 - 2 \cdot 12 = 1 \cdot (3 \cdot 99 - 1 \cdot 268) - 2 \cdot (3 \cdot 268 - 8 \cdot 99) = 19 \cdot 99 - 7 \cdot 268$$

$$12 : 5 = 2, \text{ RESTO } 2 \Rightarrow 2 = 1 \cdot 12 - 2 \cdot 5 = 1 \cdot (3 \cdot 268 - 8 \cdot 99) - 2 \cdot (19 \cdot 99 - 7 \cdot 268) = 17 \cdot 268 - 46 \cdot 99$$

$$5 : 2 = 2, \text{ RESTO } 1 \Rightarrow 1 = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 1 \cdot (19 \cdot 99 - 7 \cdot 268) - 2 \cdot (17 \cdot 268 - 46 \cdot 99) = 111 \cdot 99 - 41 \cdot 268$$

QUINDI ABBIAMO TROVATO CHE:

$$268 \cdot (-41) + 99 \cdot 111 = 1$$

DA CUI SEGUE CHE LA (*) HA COME SOLUZIONE $(-41, 111)$.

QUESTO SIGNIFICA CHE LA PULCE PUÒ RAGGIUNGERE 1 CON 111 SALTI DA 99 IN AVANTI E 41 SALTI DA 268 ALL'INDIETRO. QUESTO RISPONDE ALLA DOMANDA (1).

PER RISPONDERE ALLE DOMANDE (2) E (3) SI RICORDI CHE TUTTE LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DIOFANTEA SONO DATE DA:

$$(-41 + 99k, 111 - 268k) \text{ CON } k \text{ INTERO.}$$

SI VEDE SUBITO CHE LA SOLUZIONE DI (1) È ANCHE QUELLA CHE MINIMIZZA IL NUMERO DI SALTI E QUINDI RISOLVE (2). INVECE PER (3) SERVE CHE x SIA POSITIVO QUINDI QUELLA COL MINIMO NUMERO DI SALTI SI OTTIENE PER $k=1$ E QUINDI È $(58, -157)$, CIOÈ LA PULCE DEVE FARE 58 SALTI IN AVANTI LUNGI 268 E 157 SALTI INDIETRO LUNGI 99.

OSSERVAZIONE 5 SI NOTI CHE SIAMO RIUSCITI AD ESPRIMERE 1 USANDO 268 E 99 PERCHÉ 1 COMPARIVA ALLA FINE DELLA SEQUENZA DEI RESTI. SICCOME (GRAZIE ALL'ALGORITMO EUCLIDEO) CIÒ ACCADE SE E SOLO SE I 2 NUMERI DA CUI SI PARTE SONO PRIMI TRA LORO, POSSIAMO AFFERMARE CHE VALE IL SEGUENTE:

TEOREMA 3 (BÉZOUT) SE a E b SONO PRIMI TRA LORO ALLORA L'EQUAZIONE DIOFANTEA.

$$ax + by = 1$$

AMMETTE SEMPRE SOLUZIONE.

PROBLEMA 3 UNA PULCE SALTA TRA I PUNTI DELL'ASSE x . PARTENDO DALL'ORIGINE VUOLE ARRIVARE NEL PUNTO 3 FACENDO SOLO SALTI DI LUNGHEZZA 268 O 99. QUALE È IL MINIMO NUMERO DI SALTI CHE DEVE FARE?

SOLUZIONE È QUASI IDENTICO AL **PROBLEMA 2**, CON L'UNICA DIFFERENZA CHE LA PULCE DEVE ANDARE IN 3 INVECE CHE IN 1. SI TRATTA QUINDI DI RISOLVERE L'EQUAZIONE DIOFANTEA:

$$(\nabla) \quad 268x + 99y = 3$$

SICCOME SI ERA GIÀ TROVATO, NEL **PROBLEMA 2**, CHE $(-41, 111)$ È SOLUZIONE DI:

$$268x + 99y = 1$$

AVREMO CHE IL SUO TRIPLO, CIOÈ $(-123, 333)$, È UNA SOLUZIONE DI (∇) . DI CONSEGUENZA L'INSIEME DI TUTTE LE SOLUZIONI DI (∇) È DATO DA:

$$(-123 + 99k, 333 - 268k) \quad \text{CON } k \text{ INTERO.}$$

DI ESSE QUELLA CHE MINIMIZZA IL NUMERO DI SALTI, CIOÈ $|x| + |y|$, E QUELLA CHE SI OTTIENE PER $k=1$, CIOÈ $(-24, 65)$, QUINDI IL MINIMO NUMERO DI SALTI CHE DEVE FARE LA PULCE PER ARRIVARE IN 3 È 89 SALTI: 65 SALTI IN AVANTI LUNGHI 99 E 24 SALTI INDIETRO LUNGHI 268.

PROBLEMA 4 COME IL **PROBLEMA 3**, MA CON LA PULCE CHE DEVE ARRIVARE IN 17 INVECE CHE IN 3.

SOLUZIONE SI TRATTA DI RISOLVERE L'EQUAZIONE DIOFANTEA:

$$(\square) \quad 268x + 99y = 17.$$

ANCHE QUI SI POTREBBE RICORRERE ALLO STESSO PROCEDIMENTO

DEL PROBLEMA 3, CI D'MULTIPLICARE PER 17 LA SOLUZIONE $(-4, 11)$

GIÀ TROVATA PER :

$$268x + 99y = 1$$

OTTENENDO 2 NUMERI ENORMI CHE POI PERÒ VERREBBERO RIDOTTI

SCEGLIENDO OPPORTUNAMENTE k NELLA SOLUZIONE GENERALE,

TUTTAVIA È PIÙ ISTRUTTIVO RICORRERE AD UNA SCORCIATOIA.

QUANDO ABBIAMO RISOLTO IL PROBLEMA 2 ABBIAMO FATTO I SEGUENTI

CALCOLI:

$$\begin{aligned} 268 : 99 &= 2, \text{ RESTO} = 70 \Rightarrow 70 = 1 \cdot 268 - 2 \cdot 99 \\ 99 : 70 &= 1, \text{ RESTO} = 29 \Rightarrow 29 = 1 \cdot 99 - 1 \cdot 70 = 1 \cdot 99 - 1 \cdot (1 \cdot 268 - 2 \cdot 99) = 3 \cdot 99 - 1 \cdot 268 \\ 70 : 29 &= 2, \text{ RESTO} = 12 \Rightarrow 12 = 1 \cdot 70 - 2 \cdot 29 = 1 \cdot (1 \cdot 268 - 2 \cdot 99) - 2 \cdot (3 \cdot 99 - 1 \cdot 268) = 3 \cdot 268 - 8 \cdot 99 \\ 29 : 12 &= 2, \text{ RESTO} = 5 \Rightarrow 5 = 1 \cdot 29 - 2 \cdot 12 = 1 \cdot (3 \cdot 99 - 1 \cdot 268) - 2 \cdot (3 \cdot 268 - 8 \cdot 99) = 19 \cdot 99 - 7 \cdot 268 \\ 12 : 5 &= 2, \text{ RESTO} = 2 \Rightarrow 2 = 1 \cdot 12 - 2 \cdot 5 = 1 \cdot (3 \cdot 268 - 8 \cdot 99) - 2 \cdot (19 \cdot 99 - 7 \cdot 268) = 17 \cdot 268 - 46 \cdot 99 \\ 5 : 2 &= 2, \text{ RESTO} = 1 \Rightarrow 1 = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 1 \cdot (19 \cdot 99 - 7 \cdot 268) - 2 \cdot (17 \cdot 268 - 46 \cdot 99) = 11 \cdot 99 - 41 \cdot 268 \end{aligned}$$

IN PARTICOLARE ABBIAMO TROVATO CHE:

$$12 = 3 \cdot 268 - 8 \cdot 99$$

E CHE :

$$5 = 19 \cdot 99 - 7 \cdot 268$$

QUINDI:

$$17 = 12 + 5 = (3 \cdot 268 - 8 \cdot 99) + (19 \cdot 99 - 7 \cdot 268) = 11 \cdot 99 - 4 \cdot 268$$

QUINDI UNA SOLUZIONE DI $(\square)$ È DATA DA $(-4, 11)$.

DI CONSEGUENZA LA SOLUZIONE GENERALE È:

$$(-4 + 99k, 11 - 268k) \quad \text{CON } k \text{ INTERO}$$

QUELLA CHE MINIMIZZA IL NUMERO DI SALTI È PERCIÒ
PROPRIO QUELLA CHE SI OTTIENE PER $k = 0$.

OSSERVAZIONE 6 QUANDO SAPPAMO RISOLVERE:

(#) $ax + by = 1$

SAPPAMO ANCHE RISOLVERE:

(*) $ax + by = c$

USANDO IL PROCEDIMENTO DESCRITTO NEL **PROBLEMA 3**, OPPURE USANDO QUALCHE SCORCIATOIA COME NEL **PROBLEMA 4**.

SICCOME PER a E b PRIMI TRA LORO SAPPAMO SEMPRE RISOLVERE LA (#), SIAMO SICURI DI SAPER RISOLVERE ANCHE (*).

PER COMPLETARE LA CASISTICA RIMANE DA TRATTARE IL CASO IN CUI a E b NON SONO PRIMI TRA LORO, CHE VEDIAMO NEI PROSSIMI PROBLEMI.

PROBLEMA 5 UNA BILANCIA A PIATTI È SBILANCIATA: IL PIATTO A PESA 3 GRAMMI PIÙ DEL PIATTO B. HO A DISPOSIZIONE PESETTI DA 99 GRAMMI E DA 267 GRAMMI DA METTERE SUI PIATTI IN MODO DA COMPENSARE LO SBILANCIAMENTO. COME POSSO FARE?

SOLUZIONE L'EQUAZIONE DIOFANTEA CHE TRADUCE ALGEBRICAMENTE IL PROBLEMA È:

(*) $267x + 99y = 3$

STAVOLTA PERÒ 267 E 99 NON SONO PRIMI TRA LORO PERCHÉ $\text{MCD}(267, 99) = 3$.

TUTTAVIA, VISTO CHE ANCHE IL II° MEMBRO È DIVISIBILE PER 3, NELLA (*) POSSO DIVIDERE AMB I MEMBRI PER 3, OTTENENDO L'EQUAZIONE EQUIVALENTE:

$$89x + 33y = 1$$

DOVE STAVOLTA 89 E 33 SONO PRIMI TRA LORO, COSICCHÉ L'EQUAZIONE PUÒ ESSERE RISOLTA CON I METODI GIÀ IMPARATI, OTTENENDO CHE LA SOLUZIONE GENERALE È:

$$(-10 + 33k, 27 - 89k) \text{ CON } k \text{ INTERO}$$

CHE QUINDI È ANCHE LA SOLUZIONE GENERALE DI (*).

POSSO QUINDI RIEQUILIBRARE LA BILANCIA METTENDO 10 PESETTI DA 267 GRAMMI SUL PIATTO A E 27 PESETTI DA 99 GRAMMI SUL PIATTO B.

PROBLEMA 6 COME IL PROBLEMA 5, MA CON L'UNICA DIFFERENZA CHE IL PIATTO A PESA 4 GRAMMI PIÙ DEL PIATTO B.

SOLUZIONE STAVOLTA L'EQUAZIONE DIOFANTEA CHE TRADUCE IL PROBLEMA È:

$$(A) \quad 267x + 99y = 4$$

SI OSSERVI PERÒ CHE, SE x E y SONO INTERE, IL PRIMO MEMBRO È SEMPRE UN MULTIPLO DI 3, QUINDI NON PUÒ ESSERE UGUALE A 4.

CIÒ SIGNIFICA CHE LA (A) NON PUÒ AVERE SOLUZIONI INTERE.

QUINDI NON RIUSCIAMO A RIBILANCIARE LA BILANCIA.

OSSERVAZIONE 7 PROCEDENDO IN MODO ANALOGO A QUANTO FATTO NEI PROBLEMI 5 E 6, SIAMO ORA IN GRADO DI TRATTARE ANCHE IL CASO GENERALE IN CUI, NELL'EQUAZIONE

$$ax + by = c$$

a E b NON SONO PRIMI TRA LORO.

INFATTI, SE $\text{MCD}(a, b)$ NON DIVIDE c , SIAMO IN GRADO DI VERIFICARE, COME NEL PROBLEMA 6, CHE NON CI SONO SOLUZIONI.

SE INVECE $\text{MCD}(a, b)$ DIVIDE c , PROCEDENDO COME NEL PROBLEMA 5, DIVIDIAMO AMB I MEMBRI PER $\text{MCD}(a, b)$ E CI RICONDUCIAMO AL CASO IN CUI a E b SONO PRIMI TRA LORO, CHE SAPPIAMO RISOLVERE.
