$\boxed{\text{POLINOMI}}$

PROBLEMA 1 Sia $p(x)$ un polinomio tale che $p(p(x)) = x^4 - 4x^2 - 2$, calcolare $p(5)$.

OSSERVAZIONE 1 Anche se l'enunciato chiede di calcolare $p(5)$, questo non è più facile che trovare il polinomio e noi calcoleremo $p(5)$ solo dopo aver trovato il polinomio.

OSSERVAZIONE 2 Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ allora $p(p(x)) = a_n(a_n x^n + \dots + a_0)^n + a_{n-1}(a_n x^n + \dots + a_0)^{n-1} + \dots + a_0$, sviluppare questa espressione è molto lungo ma, per svolgere il problema ci basterà conoscere l'addendo di grado più alto che appare nello sviluppo.
Tale addendo è $a_n(a_n x^n)^n = a_n^{n+1}(x^n)^n = \boxed{a_n^{n+1} x^{n^2}}$.
Quindi $p(p(x)) = a_n^{n+1} x^{n^2} + (\text{addendi di grado} \leq n^2 - 1)$.

SOLUZIONE 1 Siccome l'addendo di grado più alto di $x^4 - 4x^2 + 2$ è x^4, per l'OSSERVAZIONE 2 abbiamo $n^2 = 4$, cioè $n = 2$, $a_2^3 = 1$, cioè $a_2 = 1$. Quindi il polinomio cercato è della forma $p(x) = x^2 + bx + c$.
Di conseguenza $p(p(x)) = (p(x))^2 + b(p(x)) + c = (x^2 + bx + c)^2 + b(x^2 + bx + c) + c = x^4 + b^2x^2 + c^2 + 2bx^3 + 2cx^2 + 2bcx + bx^2 + b^2x + bc + c$. Siccome $x^4 - 4x^2 + 2$ non ha termine di terzo grado, il termine di terzo grado di questo sviluppo, $2bx^3$, deve essere nullo: quindi $b = 0$. Quindi $p(x)$ è della forma $p(x) = x^2 + c$, siccome $p(p(x)) = (p(x))^2 + c = (x^2 + c)^2 + c = x^4 + 2cx^2 + c^2 + 2$ deve essere uguale a $x^4 - 4x^2 + 2$, uguagliando i termini di secondo grado si ottiene $-4 = 2c$ cioè $c = -2$.
Quanto fatto fino ad ora dimostra che, se esiste un polinomio che soddisfa $p(p(x)) = x^4 - 4x^2 + 2$ questo polinomio è $p(x) = x^2 - 2$. Per ottenerlo abbiamo usato che $x^4 - 4x^2 + 2$ ha grado 4, il coefficiente del termine di grado 4 è 1, quello del termine di grado 3 è 0 e quello del termine di grado 2 è -4.
In effetti tale polinomio soddisfa $p(p(x)) = x^4 - 4x + 2$. Infatti $(x^2 - 2)^2 - 2 = x^4 - 4x^2 + 4 - 2 = x^4 - 4x^2 + 2$. Possiamo concludere che $p(5) = 5^2 - 2 = 23$.

OSSERVAZIONI COMPLEMENTARI 1

Sostituendo nel problema x^4-4x^2+2 con un altro polinomio $q(x)$ può accadere che:

(1) Non esista nessun polinomio $p(x)$ tale che $p(p(x))=q(x)$. Ad esempio, l'OSSERVAZIONE 2 dice che, se vogliamo che tale $p(x)$ esista, il grado di $q(x)$ deve essere pari a n^2 per un intero positivo n. Caso particolare: siccome 7 non è un quadrato non esiste $p(x)$ tale che $p(p(x))=x^7+6x^6+3x^2+2$.
Anche se $q(x)=x^4-4x^2+1$ non esiste $p(x)$ tale che $p(p(x))=q(x)$. Infatti ripetendo il ragionamento della Soluzione 1 si trova che se $p(x)$ esiste, deve essere $p(x)=x^2-2$. In questo caso però $p(p(x))=x^4-4x^2+2 \neq x^4-4x^2+1$.

(2) Esista più di un polinomio tale che $p(p(x))=q(x)$. Ad esempio, se $q(x)=x^9$ possiamo prendere come $p(x)$ sia x^3 che $-x^3$.

PROBLEMA 2

Sia $p(x)$ un polinomio di grado 10 tale che $p(x^2)=(p(x))^2$, calcolare $p(2)$.

OSSERVAZIONE 3

Di solito $p(x^2)\neq p(p(x))$, se
$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ si ha
$p(x^2)=a_nx^{2n}+a_{n-1}x^{2n-2}+\dots+a_1x^2+a_0$ e lo sviluppo di $p(x^2)$ contiene solo termini di grado pari. $p(p(x^2))$ contiene anche termini di grado dispari in generale.
Ad esempio se $p(x)=2x^3+x^2$, si ha $p(x^2)=2x^6+x^4$ e $(p(x))^2=4x^6+x^4+4x^5$.

OSSERVAZIONE 4

Il termine di grado massimo di $p(x^2)$ è a_nx^{2n}. Il termine di grado massimo di $(p(x))^2=a_n^2x^{2n}$.

SOLUZIONE 2

Siccome $p(x)$ ha grado 10 sarà $p(x)=a_{10}x^{10}+a_9x^9+\dots+a_1x+a_0$ e $a_{10}\neq 0$. Siccome $p(x^2)=(p(x))^2$, i termini di grado massimo 20 di $p(x^2)$ e $(p(x))^2$ sono uguali. Per l'Osservazione 4 deve essere $a_{10}x^{20}=a_{10}^2x^{20}$, cioè $a_{10}=a_{10}^2$, quindi $a_{10}^2-a_{10}=0$, $a_{10}(a_{10}-1)=0$ e, siccome $a_{10}\neq 0$, $a_{10}=1$. A questo punto è naturale osservare che il polinomio $p(x)=x^{10}$ soddisfa $p(x^2)=(p(x))^2$ infatti $p(x^2)=(x^2)^{10}=x^{20}$ e $(p(x))^2=(x^{10})^2=x^{20}$, perciò $p(2)=2^{10}$.

OSSERVAZIONE COMPLEMENTARE 2

Il problema chiede di calcolare $p(2)$ sapendo solo che $p(x)$ ha grado 10. Se il problema è ben posto, calcolare in 2 un qualsiasi polinomio di grado 10 che soddisfi $p(x^2) = (p(x))^2$ produce lo stesso risultato. Siccome x^{10} soddisfa $p(x^2) = (p(x))^2$ ci è bastato calcolare in 2 il polinomio x^{10}. È naturale chiedersi però se il problema sia ben posto. La risposta è sì. Infatti c'è un unico polinomio di grado 10 che soddisfa $p(x^2) = (p(x))^2$. Convinciamocene. Un polinomio di grado 10 diverso da x^{10} sarà della forma $x^{10} + a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0$, con $a_k \neq 0$ e $0 \leq k < 10$. Mostriamo che se $a_k \neq 0$ allora $p(x^2) \neq (p(x))^2$ analizzando il secondo termine di grado più alto di $p(x^2)$ e $(p(x))^2$. Il secondo termine di grado più alto di $p(x^2)$ è $a_k x^{2k}$, il secondo termine di grado più alto di $(p(x))^2 = (x^{10} + a_k x^k + \dots + a_0)^2 = x^{20} + \underbrace{2a_k}_{\neq 0} x^{10+k} + \dots + a_0^2$ è $2a_k x^{10+k}$ e siccome $10+k \neq 2k$, $p(x^2) \neq (p(x))^2$.

PROBLEMA 3 Trovare il massimo grado di un polinomio che soddisfa $p(x) = p(x+1)$.

OSSERVAZIONE 5 Per questo problema occorre ricordare che se $p(x)$ è un polinomio non identicamente nullo di grado $n \geq 0$, $p(x)$ ha al più n radici distinte, cioè esistono al più n soluzioni distinte dell'equazione $p(x) = 0$.

SOLUZIONE 3 Se $p(x) = p(x+1)$, $p(x)$ è un polinomio costante, quindi la risposta al problema è 0. Vediamo perché. Siccome l'equazione $p(x) = 0$ potrebbe non avere nessuna soluzione per usare l'Osservazione 5, costruiamo un polinomio che abbia almeno una radice e soddisfi ancora $q(x) = q(x+1)$. Basta prendere il numero $c = p(0)$ e considerare il polinomio $q(x) = p(x) - c$. Notiamo che $q(x) = p(x) - c = p(x+1) - c = q(x+1)$ e $q(0) = 0$. Da $q(x) = q(x+1)$ deduciamo che $q(0) = q(1) = q(2) = \cdots = q(n) = q(n+1)$ cioè $q(k) = 0$, per ogni intero k. Quindi l'equazione $q(x) = 0$ ha infinite soluzioni. Per l'osservazione 5 $q(x)$ deve essere il polinomio identicamente nullo. Siccome $q(x)$ è il polinomio identicamente nullo, $p(x)$ è il polinomio costante uguale a c.

OSSERVAZIONI COMPLEMENTARI 3

Mostriamo ora che se $p(x)$ non è il polinomio nullo e $p(x)$ ha grado $n \geq 0$, l'equazione $p(x)=0$ ha al più n soluzioni distinte. Siano $x_1, \dots, x_n$ soluzioni distinte dell'equazione $p(x)=0$ cioè $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$ e $p(x_i)=0$, $\forall i$. Dobbiamo far vedere che, se x_{n+1} è un numero diverso da $x_1, x_2, \dots, x_n$ allora $p(x_{n+1}) \neq 0$.

Per il TEOREMA DI RUFFINI se $p(x_i)=0$, $(x-x_i)$ divide $p(x)$ cioè $\exists\, q(x)$ polinomio di grado $n-1$ tale che $p(x)=(x-x_i)\,q(x)$.

Quindi $\exists\, q_1(x)$ tale che $p(x)=(x-x_1)\,q_1(x)$. Siccome $p(x_2)=0$ e $x_2-x_1 \neq 0$ abbiamo anche $q_1(x_2)=0$ e perciò possiamo applicare Ruffini a $q_1(x)$. Otteniamo che $\exists$ $q_2(x)$ tale che $q_1(x)=(x-x_2)\,q_2(x)$. Perciò

$p(x)=(x-x_1)(x-x_2)\,q_2(x)$. Ripetendo il ragionamento n volte otteniamo $p(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\,q_n(x)$ e $q_n(x)$ ha grado 0, cioè è una costante c.

Inoltre $c \neq 0$ perché $p(x)$ non è un polinomio nullo.

Ora $p(x_{n+1}) \neq 0$ perché $(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\cdots(x_{n+1}-x_n)\,c$ è prodotto di numeri non nulli.

PROBLEMA 4 Sia $p(x)$ tale che il resto della divisione di $p(x)$ per $x-1$ è 2 e il resto della divisione di $p(x)$ per $x+1$ è 10. Trovare il resto della divisione $p(x) : x^2-1$.

OSSERVAZIONE 6 Conoscere il resto della divisione di $p(x)$ per $(x-\alpha)$ equivale a conoscere $p(\alpha)$. Infatti tale resto è un polinomio di grado 0, cioè una costante c e $p(x) = q(x)(x-\alpha)+c$. Perciò $p(\alpha) = q(\alpha)\underbrace{(\alpha-\alpha)}_{=0}+c \Rightarrow p(\alpha) = c$.

SOLUZIONE 4 Per l'OSSERVAZIONE 6 sappiamo che $p(1) = 2$ e $p(-1) = 10$. Eseguendo la divisione di $p(x)$ per $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ otteniamo
$p(x) = (x+1)(x-1)q(x) + r(x)$ dove $p(x)$ è un polinomio di primo grado: cioè $r(x) = ax+b$. Siccome $p(1)=2$ abbiamo $2 = p(1) = (1+1)\underbrace{(1-1)}_{=0}q(1) + a\cdot 1 + b$ cioè $a+b=2$.

Siccome $p(-1) = 10$ abbiamo

$$10 = p(-1) = (-1+1)(-1-1)\,q(-1) + a(-1)+b$$

cioè $-a+b=10$. Risolvendo il sistema $\begin{cases} a+b=2 \\ -a+b=10 \end{cases}$

si ottiene $a=-4$, $b=6$ da cui il resto cercato è $-4x+6$.

PROBLEMA 5 Trovare il resto della divisione
$x^{73} + x^6 + 5x + 3 : x^2+1$.

OSSERVAZIONE 7 In linea di principio si può svolgere la divisione, ma può essere molto dispendioso. Nella soluzione presenteremo un metodo più rapido.

OSSERVAZIONE 8 Per il calcolo del resto della divisione tra polinomi valgono regole analoghe a quelle che valgono per il resto nella divisione tra numeri interi.
Se $p(x)$, $d(x)$ e $h(x)$ sono polinomi e $\text{Resto}\,(p(x):d(x)) = r(x)$

$\Rightarrow$ 1) $\text{Resto}\,((h(x)\,p(x)) : d(x)) = \text{Resto}\,(h(x)\,r(x) : d(x))$
2) $\text{Resto}\,((h(x)+p(x)) : d(x)) = \text{Resto}\,((h(x)+r(x)) : d(x))$
3) $\text{Resto}\,((p(x))^n : d(x)) =$ Res o $\;r(x))^n : d(x))$

Mostriamo solo 1) [2) è più facile e 3) si ottiene applicando 1) n-volte]: Sappiamo che $p(x) = q(x)\,d(x) + r(x)$, quindi $h(x)\,p(x) = h(x)\,q(x)\,d(x) + h(x)\cdot r(x)$ e siccome $h(x)\,q(x)\,d(x)$ è divisibile per $d(x)$, le divisioni $h(x)\,p(x) : d(x)$ e $h(x)\,p(x) : r(x)$ hanno lo stesso resto.

SOLUZIONE 5 Nel calcolo del resto della divisione per $d(x) = x^2+1$, possiamo semplificare il dividendo usando la relazione $d(x) = 0$ (cioè $x^2+1=0$, cioè $x^2=-1$) fino ad ottenere un polinomio di grado < del grado di $d(x)$: quel polinomio sarà il resto cercato!
Nel nostro caso ad ogni occorrenza di x^2 nel dividendo possiamo sostituire il polinomio costante -1.
In questo modo, siccome

$$x^{73} + x^6 + 5x + 3 = (x^2)^{36}\cdot x + (x^2)^2 + 5x + 3,$$

otteniamo il polinomio $(-1)^{36}x + (-1)^3 + 5x + 3 = 6x+2$ che ha grado 1 ed è il resto cercato. Giustifichiamo ora più rigorosamente il procedimento usato.
Osserviamo che la divisione $x^2 : \underbrace{x^2+1}_{d(x)}$ ha resto pari al polinomio costante $r(x) = -1$. Per 2) di

OSSERVAZIONE 8

⭐ $\text{RESTO}(x^{73} + x^6 + 5x + 3 : dx) = \text{RESTO}\left(\left(\text{RESTO}(x^{73} : d(x)) + \text{RESTO}(x^6 : d(x)) + 5x + 3\right) : d(x)\right)$

ma $\text{RESTO}(x^{73} : d(x)) = \text{RESTO}\left((x^2)^{36} \cdot x : d(x)\right) \overset{\text{1) di OSSERVAZIONE 8}}{=}$

$\text{RESTO}\left(\left(\text{RESTO}((x^2)^{36} : d(x)\right) x : d(x)\right) \overset{\text{3) di OSSERVAZIONE 8}}{=}$

$\text{RESTO}\left(\text{RESTO}\left((-1)^{36} : d(x)\right) x : d(x)\right) =$

$\text{RESTO}\left(\text{RESTO}(1 : d(x)) x : d(x)\right) = \text{RESTO}(x : d(x)) = x$

e $\text{RESTO}(x^6 : d(x)) = \text{RESTO}\left((x^2)^3 : d(x)\right) \overset{\text{3) di OSSERVAZIONE 8}}{=} \text{RESTO}\left((-1)^3 : d(x)\right) =$

$= -1$

Sostituendo in ⭐ otteniamo

$\text{RESTO}(x^{73} + x^6 + 5x + 3 : x^2 + 1) = \text{RESTO}\left((x - 1 + 5x + 3) : x^2 + 1\right) =$

$= \text{RESTO}(6x + 2 : x^2 + 1) = 6x + 2$

perché $\underbrace{\text{grado di } (6x+2)}_{= 1} < \underbrace{\text{grado di } (x^2+1)}_{= 2}$

PROBLEMA 6 Data l'equazione $x^3+80x^2-900x+1000=0$ trovare

1) Somma delle soluzioni reali
2) Prodotto delle soluzioni reali
3) somma dei quadrati delle soluzioni reali
4) Somme dei reciproci delle soluzioni reali.

OSSERVAZIONE 9 Per risolvere questo problema non è necessario conoscere le soluzioni dell'equazione.

OSSERVAZIONE 10 [I coefficienti di un polinomio sono funzioni simmetriche delle radici]

Se $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono soluzioni reali e distinte di $p(x)=0$, come abbiamo visto in OSSERVAZIONI COMPLEMENTARI 3, deve essere vera l'uguaglianza fra polinomi

$$x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdot c$$

sviluppando il prodotto otteniamo

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdot c = c\left(x^3-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x^2+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3\right).$$

Eguagliando i coefficienti dei due polinomi otteniamo

$$c=1,\quad a_2=-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3),\quad a_1=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3,\quad a_0=\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono soluzioni distinte di $p(x)=0$.

Con lo stesso ragionamento si ottiene

$$a_k = \left(\sum_{i_1<i_2<\dots<i_{n-k}} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_{n-k}}\right)(-1)^{n-k}$$

SOLUZIONE 6 Se l'equazione $x^3+80x^2-900x+1000=0$ ha tre soluzioni reali distinte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, per l'OSSERVAZIONE 10 sappiamo che:

$$-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=80$$
$$(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)=-900$$
$$-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=1000$$

quindi la somma delle soluzioni reali è $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-80$

il prodotto delle soluzioni reali è $\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-1000$

mentre la somma dei quadrati delle soluzioni reali è

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2-2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)$$
$$=(-80)^2-2(900)=2440$$

La somma dei reciproci delle soluzioni reali è

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}=\frac{\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}=\frac{-900}{-1000}=\frac{9}{10}$$

Dobbiamo però ancora verificare che l'equazione

$$x^3+80x^2-900x+1000$$

abbia 3 soluzioni reali e distinte. Per farlo utilizziamo il Teorema degli zeri:

> Se $x_1<x_2$ e
> $p(x_1)<0$ e $p(x_2)>0$ oppure
> $p(x_2)>0$ e $p(x_1)<0$
> esiste un numero reale x_0 con $x_1<x_0<x_2$ tale che $p(x_0)=0$.

Per usarlo osserviamo che $p(-1000)<0$, $p(0)=1000>0$, $p(2)=8+320-1800+1000=-430<0$, $p(1000)>0$.

Per il TEOREMA DEGLI ZERI

esiste α_1 soluzione di $p(x)=0$ con $-1000<\alpha_1<0$

esiste α_2 soluzione di $p(x)=0$ con $0<\alpha_2<2$ ed

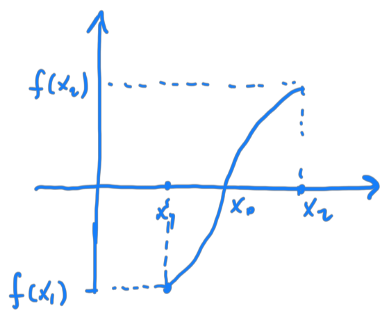
esiste α_3 soluzione di $p(x)=0$ con $2<\alpha_2<1000$.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono le tre soluzioni reali volute di $p(x)=0$.

OSSERVAZIONE COMPLEMENTARE 4 Il TEOREMA DEGLI ZERI, più in generale, dice che:

> Se $f(x)$ è una funzione a valori reali continua definita sugli x reali tali che $x_1 \leq x \leq x_2$ e tale che $f(x_1)<0$ e $f(x_2)>0$ (oppure $f(x_1)>0$ e $f(x_2)<0$), allora esiste x_0 reale con $x_1 < x_0 < x_2$, tale che $f(x_0)=0$.

Intuitivamente una funzione continua definita sugli x reali tali che $x_1 \leq x \leq x_2$ è una funzione il cui grafico (sopra gli x con $x_1 \leq x \leq x_2$) può essere disegnato senza staccare la matita dal foglio. Se questo è vero e $f(x_1)<0$ e $f(x_2)>0$ il grafico di $f(x)$ dovrà necessariamente attraversare l'asse delle x in almeno un punto x_0 compreso tra x_1 e x_2. Sarà allora $f(x_0)=0$:



Nonostante l'enunciato del TEOREMA DEGLI ZERI sia elementare e tutt'altro che sorprendente la dimostrazione formale è non banale: richiede degli strumenti di Analisi Matematica e si può trovare in un qualsiasi testo di ANALISI MATEMATICA 1.