

Stage Urbi et Orbi - Lez. 9

Titolo nota

1 Marzo 2019 (15.00-18.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

www.problemisvolti.it

MEDIE-DISUGUAGLIANZE - MAX & MIN

PROBLEMA 0.1 TROVARE IL MASSIMO VALORE CHE PUÒ ASSUMERE $a \cdot b$ SAPENDO CHE $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 100$.

PRIMO METODO RISOLUTIVO

SENZA PERDERE DI GENERALITÀ POSSIAMO SUPPORRE CHE SIA $a \geq b$, COSICCHÉ, ESSENDO $a + b = 100$, a E b SONO DEL TIPO:

$$a = 50 + \delta$$

$$b = 50 - \delta$$

$$\text{CON } 0 \leq \delta < 50$$

DI CONSEGUENZA

$$a \cdot b = (50 + \delta) \cdot (50 - \delta) = 50^2 - \delta^2 \geq 50^2 = 2500.$$

QUINDI $a \cdot b$ ASSUME VALORE MASSIMO QUANDO $\delta = 0$, CIOÈ QUANDO $a = 50 = b$.

IL MASSIMO CERCATO È DUNQUE 2500.

SECONDO METODO RISOLUTIVO

I° PASSO MOSTRIAMO CHE PER OGNI COPPIA DI NUMERI REALI a E b , CON $a > 0$ E $b > 0$, VALE LA DISUGUAGLIANZA:

$$(1) \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

DOVE L'UGUAGLIANZA VALE SE E SOLO SE $a = b$.

SI NOTI CHE, ESSENDO TUTTE LE QUANTITÀ IN GIOCO POSITIVE, DIMOSTRARE LA (1) EQUIVALE A DIMOSTRARE:

$$ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$$

CIOÈ:

$$4ab \leq (a+b)^2$$

CIOÈ:

$$(2) \quad (a+b)^2 - 4ab \geq 0.$$

BASTERÀ QUINDI DIMOSTRARE (2), CHE PERD'È OVVIA PERCHÈ:

$$(3) \quad (a+b)^2 - 4ab = a^2 + b^2 + 2ab - 4ab = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0$$

SI NOTI INOLTRE CHE IN (3) LA DISUGUAGLIANZA FINALE DIVENTA UN'UGUAGLIANZA SE E SOLO SE $a=b$.

QUESTO COMPLETA LA DIMOSTRAZIONE DI (1).

II° PASSO RISOLVIAMO IL PROBLEMA USANDO (1).

DA (1) SEGUE CHE:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

CON L'UGUAGLIANZA CHE VALE SE E SOLO SE $a=b$.

POSSIAMO QUINDI CONCLUDERE CHE, PER $a=b=50$, $\sqrt{ab}$ ASSUME VALORE MASSIMO. ELEVANDO TUTTO AL QUADRATO SI OTTIENE CHE

$$\max(a \cdot b) = 50^2 = 2500$$

OSSERVAZIONE 1 L'ARGOMENTAZIONE USATA

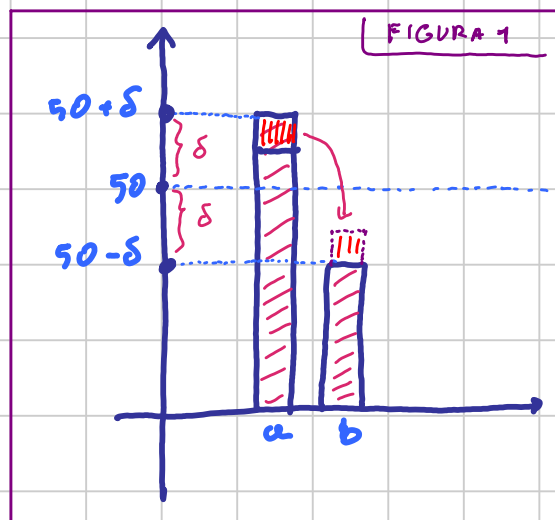
NEL PRIMO PROCEDIMENTO RISOLUTIVO DEL

PROBLEMA 0.1 HA UN UTILE EFFETTO COLLATERALE:

QUANDO $a+b$ È FISSATO, NON SOLO $a \cdot b$

È MASSIMO PER $a=b$ MA, PIÙ IN

GENERALE, $a \cdot b$ CRESCE MAN MANO



CHE LA DIFFERENZA $a-b=2\delta$ DIMINUISCE.

POSSIAMO QUINDI IMMAGINARE (VEDI FIGURA 1) DI AUMENTARE IL PRODOTTO $a \cdot b$, TENENDO FISSA $a+b$, CON UN PICCOLO "TRAVASO" DA a A b (PICCOLO SIGNIFICA MINORE DI δ).

IN SEGUITO IL FATTO CHE, OPERANDO TALE "TRAVASO", IL PRODOTTO $a \cdot b$ AUMENTI STRETTAMENTE CI SARÀ MOLTO UTILE PER BANALIZZARE ALCUNI PASSAGGI.

PROBLEMA 0.2 TROVARE IL MINIMO VALORE CHE PUÒ ASSUMERE a^2+b^2 SAPENDO CHE $a>0$, $b>0$, $a+b=100$.

PRIMO METODO RISOLUTIVO

SENZA PERDERE DI GENERALITÀ POSSIAMO SUPPORRE CHE SIA $a \geq b$, COSICCHÉ, ESSENDO $a+b=100$, a E b SONO DEL TIPO:

$$\begin{aligned} a &= 50 + \delta \\ b &= 50 - \delta \end{aligned} \quad \text{CON } 0 \leq \delta < 50$$

DI CONSEGUENZA

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (50 + \delta)^2 + (50 - \delta)^2 = \\ &= 50^2 + 100\delta + \delta^2 + 50^2 - 100\delta + \delta^2 = \\ &= 2 \cdot (50^2 + \delta^2) \end{aligned}$$

QUINDI a^2+b^2 È MINIMA QUANDO $\delta=0$, CIOÈ QUANDO $a=b$.

IL MINIMO CERCATO È PERCIÒ 50^2+50^2 , CIOÈ 5000.

SECONDO METODO RISOLUTIVO

I° PASSO MOSTRIAMO CHE PER OGNI COPPIA DI NUMERI REALI a E b , CON $a>0$ E $b>0$, VALE LA DISUGUAGLIANZA:

$$(4) \quad \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

DOVE VALE L'UGUAGLIANZA SE E SOLO SE $a=b$.

SI NOTI CHE, ESSENDO TUTTE LE QUANTITÀ IN GIOCO POSITIVE, DIMOSTRARE LA (4) EQUIVALE A DIMOSTRARE CHE:

$$\frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

CIOÈ CHE:

$$(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

CIOÈ CHE:

$$(5) \quad 2a^2 + 2b^2 - (a+b)^2 \geq 0$$

MA (5) È OVVIA PERCHÉ:

$$\begin{aligned} 2a^2 + 2b^2 - (a+b)^2 &= 2a^2 + 2b^2 - a^2 - 2ab - b^2 = \\ &= a^2 + b^2 - 2ab = \\ &= (a-b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

UGUAGLIANZA
VALE SE E SOLO
SE $a = b$

DI CONSEGUENZA (5), E QUINDI ANCHE (4), SONO VERE E SI VERIFICA L'UGUAGLIANZA SE E SOLO SE $a = b$.

II° PASSO RISOLVIAMO IL PROBLEMA USANDO (4).

DA (4) SEGUE CHE:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

CON L'UGUAGLIANZA CHE VALE SE E SOLO SE $a = b$.

POSSIAMO QUINDI CONCLUDERE CHE, PER $a = b = 50$, $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ ASSUME VALORE MASSIMO.

QUINDI ANCHE $a^2 + b^2$ È MASSIMO PER $a = b = 50$ E SI OTTIENE:

$$\text{MAX}(a^2 + b^2) = 50^2 + 50^2 = 5000$$

OSSERVAZIONE 2 NEI PROBLEMI 0.1 E 0.2 IL SECONDO PROCEDIMENTO RISOLUTIVO

PROPOSTO RISULTA UN PO' PIÙ MACCHINOSO, MA HA IL VANTAGGIO DI ESSERE GENERALIZZABILE.

INFATTI VALE IL SEGUENTE RISULTATO:

TEOREMA 1 DATI $a_1, a_2, \dots, a_n$ REALI E POSITIVI, ALLORA SI HA:

(6) $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$

MEDIA ARMONICA MEDIA GEOMETRICA MEDIA ARITMETICA MEDIA QUADRATICA

DOVE CIASCUN " $\leq$ " DIVENTA "=" SE E SOLO SE $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

OSSERVAZIONE 3 DAREMO PIÙ AVANTI UNA DIMOSTRAZIONE DEL **TEOREMA 1**.

NEI PROBLEMI CHE SEGUONO, INVECE, IMPAREREMO AD USARLO IN MODO VIA VIA MENO SEMPLICE.

PROBLEMA 1 TROVARE IL MASSIMO VALORE CHE PUÒ ASSUMERE $a \cdot b \cdot c$ SAPENDO CHE $a > 0, b > 0, c > 0, a + b + c = 36$.

SOLUZIONE

DALLA II DISUGUAGLIANZA DI (6) SEGUE CHE

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} = \frac{36}{3} = 12$$

CON L'UGUAGLIANZA CHE VALE SE E SOLO SE $a = b = c$. MA POICHÉ $a + b + c = 36$, CIÒ SIGNIFICA CHE $a = b = c = 12$, QUINDI:

$$\max \sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{12 \cdot 12 \cdot 12} = 12.$$

DA CIÒ SEGUE CHE:

$$\max(abc) = 12^3 = 1728.$$

PROBLEMA 2 TROVARE IL MINIMO VALORE CHE PUÒ ASSUMERE $a + b + c$ SAPENDO CHE $a > 0, b > 0, c > 0, abc = 1000$.

SOLUZIONE

DALLA II DISUGUAGLIANZA DI (6) SEGUE CHE

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{1000} = 10$$

CON L'UGUAGLIANZA CHE VALE SE E SOLO SE $a=b=c$, CIOÈ QUANDO $a=b=c=10$. CIO' SIGNIFICA CHE:

$$\text{MIN } \frac{a+b+c}{3} = 10$$

E QUINDI:

$$\text{MIN } (a+b+c) = 30$$

PROBLEMA 3 TROVARE IL MASSIMO VALORE CHE PUÒ ASSUMERE $a \cdot b \cdot c$ SAPENDO CHE $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a+2b+3c=36$.

SOLUZIONE

OSSERVIAMO CHE:

$$a \cdot b \cdot c = \frac{1}{6} \cdot a \cdot 2b \cdot 3c$$

QUINDI SI TRATTA DI MASSIMIZZARE IL PRODOTTO DEI 3 NUMERI $x=a$, $y=2b$ E $z=3c$ SAPENDO CHE $x+y+z=36$.

SAPPIAMO GIÀ (VEDI **PROBLEMA 1**) CHE CIO' ACCADE QUANDO $x=y=z=12$, CIOÈ QUANDO $a=2b=3c=12$, CIOÈ PER

$$a=12, b=6, c=4$$

QUINDI:

$$\text{MAX}(abc) = 12 \cdot 6 \cdot 4 = 288$$

PROBLEMA 4 TROVARE IL MASSIMO VALORE CHE PUÒ ASSUMERE $a \cdot b^2 \cdot c^3$ SAPENDO CHE $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a+b+c=12$.

SOLUZIONE

SE VOGLIAMO APPLICARE ANCORA APPLICARE LA II DISUGUAGLIANZA DI (6) DOBBIAMO RISCRIVERE SIA L'ESPRESSIONE DA MASSIMIZZARE SIA QUELLA CON LA CONDIZIONE DA RISPETTARE (IL COSIDDETTO "VINCOLO") IN MODO CHE SIANO UNA IL PRODOTTO E L'ALTRA LA SOMMA DEGLI STESSI NUMERI.

LA FUNZIONE DA MASSIMIZZARE È:

$$a \cdot b^2 \cdot c^3 = a \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot c = 108 \cdot a \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{3} \cdot \frac{c}{3} \cdot \frac{c}{3}$$

PER CAPIRE PERCHÉ L'ABBIAMO RISCRIITTA COSÌ, BASTA OSSERVARE CHE IL VINCOLO $a+b+c=12$ SI PUÒ RISCRIVERE:

$$a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{c}{3} + \frac{c}{3} = 12$$

È CHIARO QUINDI CHE VOGLIAMO RENDERE MASSIMO IL PRODOTTO DEI 6 NUMERI $a, \frac{b}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{3}, \frac{c}{3}, \frac{c}{3}$ QUANDO LA LORO SOMMA È FISSATA UGUALE A 12.

PROCEDENDO NEL SOLITO MODO CON LA II° DISUGUAGLIANZA DI (6) SI TROVA CHE IL MASSIMO DEL PRODOTTO SI OTTIENE QUANDO I 6 NUMERI SONO TUTTI UGUALI, CIOÈ QUANDO $a = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = 2$, CIOÈ PER:

$$a=2, b=4, c=6$$

QUINDI: $\text{MAX}(ab^2c^3) = 2 \cdot 4^2 \cdot 6^3 = 6912$

PROBLEMA 5 TROVARE IL MINIMO VALORE CHE PUÒ ASSUMERE $a+b+c$ SAPENDO CHE $a>0, b>0, c>0, abc^2=2500$.

SOLUZIONE

ANCHE IN QUESTO CASO IL TRUCCO CONSISTE NEL MANIPOLARE SIA IL VINCOLO SIA L'ESPRESSIONE DA MINIMIZZARE IN MODO CHE DIVENTINO, RISPETTIVAMENTE, PRODOTTO E SOMMA DEGLI STESSI NUMERI. SI HA:

$$a+b+c = a + b + \frac{c}{2} + \frac{c}{2}$$

ESPRESSIONE DA MINIMIZZARE

$$abc^2 = 2500 \Leftrightarrow a \cdot b \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{2500}{4} = 625$$

VINCOLO DA RISPETTARE

A QUESTO PUNTO, SEMPRE INVOCANDO LA II° DISUGUAGLIANZA DI (6), POSSIAMO CONCLUDERE CHE LA LORO SOMMA È MINIMA QUANDO SONO

TUTTI UGUALI, CIOÈ QUANDO $a=b=\frac{c}{2}=5$, CIOÈ PER:
 $a=5, b=5, c=10$

QUINDI:

$$\min(a+b+c) = 5+5+10 = 20$$

PROBLEMA 6 TROVARE IL MINIMO VALORE CHE PUÒ ASSUMERE $ab+bc+ca$ SAPENDO CHE $a>0, b>0, c>0, abc=1000$.

SOLUZIONE

OSSERVIAMO CHE IL VINCOLO $abc=1000$ PUÒ ESSERE RISCritto:

$$a^2b^2c^2 = 1000000$$

CIOÈ:

$$(ab) \cdot (bc) \cdot (ca) = 1000000$$

QUINDI, SEMPRE INVOCANDO (6), POSSO CONCLUDERE CHE $ab+bc+ca$ È MINIMA QUANDO $ab=bc=ca=100$.

QUINDI: $\min(ab+bc+ca) = 100+100+100 = 300$.

OSSERVAZIONE 4 SE IMMAGINIAMO CHE a, b, c SIANO LE 3 DIMENSIONI DI UN PARALLELEPIPEDO RETTANGOLO, IL **PROBLEMA 6** HA LA SEGUENTE INTERPRETAZIONE GEOMETRICA:

"TRA TUTTI I POSSIBILI PARALLELEPIPEDI RETTANGOLI DI VOLUME 1000, LA SUPERFICIE TOTALE È MINIMA QUANDO LE FACCE HANNO TUTTE LA STESSA AREA."

MA POICHÈ $ab=bc=ca=100 \Leftrightarrow a=b=c=10$ POSSIAMO ANCHE CONCLUDERE CHE IL PARALLELEPIPEDO RETTANGOLO CHE, FISSATO IL VOLUME, MINIMIZZA LA SUPERFICIE TOTALE, È IL CUBO.

PROBLEMA 7 TROVARE IL MINIMO VALORE CHE PUÒ ASSUMERE $a+b^2+c^3$
SAPENDO CHE $a>0, b>0, c>0, abc=3^7 \cdot 2^5$.

SOLUZIONE

STAVOLTA IL PROCEDIMENTO RISULTA PIÙ CHIARO CON UN CAMBIO DI VARIABILE: PONIAMO $x=a, y=b^2$ E $z=c^3$.

IN TAL MODO L'ESPRESSIONE DA MINIMIZZARE È $x+y+z$ MENTRE IL VINCOLO DIVENTA $x \cdot \sqrt{y} \cdot \sqrt[3]{z} = 3^7 \cdot 2^5$, CIOÈ $x^6 y^3 z^2 = 3^{42} \cdot 2^{30}$.

A QUESTO PUNTO MANIPOLIAMO VINCOLO ED ESPRESSIONE IN MODO ANALOGO A QUANTO FATTO NEL **PROBLEMA 5**:

$$x+y+z = \underbrace{\frac{x}{6} + \frac{x}{6} + \frac{x}{6} + \frac{x}{6} + \frac{x}{6} + \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{y}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} + \frac{z}{2}}_{\text{ESPRESSIONE DA MINIMIZZARE}}$$

$$x^6 \cdot y^3 \cdot z^2 = 3^{42} \cdot 2^{30} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{x}{6} \cdot \frac{x}{6} \cdot \frac{x}{6} \cdot \frac{x}{6} \cdot \frac{x}{6} \cdot \frac{x}{6} \cdot \frac{y}{3} \cdot \frac{y}{3} \cdot \frac{y}{3} \cdot \frac{z}{2} \cdot \frac{z}{2}}_{\text{VINCOLO}} = 3^{33} \cdot 2^{22}$$

ORA, INVOCANDO COME AL SOLITO LA (6), POSSIAMO CONCLUDERE CHE LA SOMMA DEGLI 11 NUMERI, CHE COSTITUISCE L'ESPRESSIONE DA MINIMIZZARE, È MINIMA QUANDO GLI 11 NUMERI SONO UGUALI, CIOÈ QUANDO:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = \sqrt[11]{3^{33} \cdot 2^{22}} = 3^3 \cdot 2^2$$

OVVERO PER:

$$x = 6 \cdot 3^3 \cdot 2^2 = 648, \quad y = 3 \cdot 3^6 \cdot 2^2 = 324, \quad z = 2 \cdot 3^3 \cdot 2^2 = 216.$$

QUINDI:

$$\text{MIN}(x+y+z) = 648 + 324 + 216 = 1188.$$

PROBLEMA 8 TROVARE IL MASSIMO VALORE CHE PUÒ ASSUMERE abc
SAPENDO CHE a, b E c SONO INTERI STRETTAMENTE POSITIVI
TALI CHE $a+b+c=20$. ATTENZIONE

SOLUZIONE

STAVOLTA BISOGNA FARE ATTENZIONE: LA RICHIESTA AGGIUNTIVA CHE a, b E c SIANO ANCHE INTERI RENDE IL PROBLEMA DIVERSO

DAI PRECEDENTI. SE TALE RICHIESTA NON CI FOSSE, BASTEREBBE OSSERVARE CHE, ESATTAMENTE COME NEL **PROBLEMA 1**, IL PRODOTTO È MASSIMO SE E SOLO SE $a=b=c=\frac{20}{3}$, QUINDI TALE MASSIMO È $\left(\frac{20}{3}\right)^3$, CIOÈ $\frac{8000}{27}$.

TUTTAVIA, VISTO CHE DOBBIAMO CONSIDERARE SOLO TERNE (a, b, c) COSTITUITE DA INTERI, LA SOLUZIONE APPENA VISTA È SBAGLIATA. VEDIAMO INVECE QUELLA GIUSTA.

PER UNA DISCUSSIONE PIÙ AGEVOLE CONVENIAMO DI CHIAMARE "BUONE" TUTTE LE TERNE (a, b, c) DOVE a, b E c SONO INTERI POSITIVI TALI CHE $a+b+c=20$.

QUINDI IL NOSTRO PROBLEMA CI CHIEDE DI TROVARE IL MASSIMO DI abc AL VARIARE DI TUTTE LE POSSIBILI TERNE BUONE (a, b, c) . FACCIAMO ORA ALCUNE CONSIDERAZIONI CHE CI PORTANO ALLA SOLUZIONE:

[1] LE TERNE BUONE SONO IN NUMERO FINITO.

[2] SE 2 NUMERI DI UNA TERNA BUONA (a, b, c) HANNO DIFFERENZA MAGGIORE O UGUALE A 2 ALLORA abc NON È IL MASSIMO CERCATO.

L'AFFERMAZIONE **[1]** È OVVIA, MENTRE LA **[2]** È CONSEGUENZA DELL'**OSSERVAZIONE 1** PERCHÉ SE DUE NUMERI AVESSERO DIFFERENZA MAGGIORE O UGUALE A 2, "TRASVASANDO" 1 DAL PIÙ GRANDE AL PIÙ PICCOLO SI OTTERREBBE ANCORA UNA TERNA BUONA (PERCHÉ $a+b+c$ RIMANE COSTANTE) MA $a \cdot b \cdot c$ AUMENTEREBBE.

LE AFFERMAZIONI **[1]** E **[2]** CI PERMETTONO DI COMPLETARE LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA.

GRAZIE A **[1]** SIAMO SICURI CHE IL MASSIMO C'È.

GRAZIE A **[2]** LE UNICHE TERNE BUONE PER LE QUALI abc PUÒ ASSUMERE VALORE MASSIMO SONO $(7, 7, 6)$, $(7, 6, 7)$ E $(6, 7, 7)$.

POICHÉ PER CIASCUNA DI TALI TERNE SI HA $abc = 294$, TALE VALORE È IL MASSIMO CERCATO.

SI NOTI CHE È LEGGERMENTE MINORE DEL VALORE OTTENUTO PRIMA, SENZA IMPORRE LA CONDIZIONE CHE a, b E c FOSSERO INTERI, VISTO CHE:

$$\left(\frac{20}{3}\right)^3 \approx 296, \dots > 294$$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1 (SECONDA DISUGUAGLIANZA)

ORA CHE ABBIAMO IMPARATO AD UTILIZZARE IL **TEOREMA 1** PER RISOLVERE ALCUNI PROBLEMI DI MAX. E MIN. È ISTRUTTIVO VEDERE LA DIMOSTRAZIONE DELLA SECONDA DELLE DISUGUAGLIANZE CHE LO COMPONGONO.

LA FAREMO IN 2 PASSI: PRIMA LA DIMOSTRIAMO IN UN CASO PARTICOLARE POI, SFRUTTANDO L'OMOGENEITÀ DELLA FORMULA, SAREMO IN GRADO DI RICONDURRE IL CASO GENERALE AL CASO PARTICOLARE DIMOSTRATO.

I PASSO MOSTRIAMO CHE SE $a_1, a_2, \dots, a_n$ SONO NUMERI STRETTAMENTE POSITIVI E TALI CHE $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$ ALLORA $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \leq 1$, CON L'UGUAGLIANZA CHE VALE SE E SOLO SE $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$. QUESTO I° PASSO SI DIMOSTRA PER INDUZIONE SU n .

PER $n = 1$ L'AFFERMAZIONE È OVVIA.

MOSTRIAMO CHE SE VALE PER $n = k$ VALE ANCHE PER $n = k + 1$.

PRESI DUNQUE $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$ STRETTAMENTE POSITIVI E TALI CHE

$$(7) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1} = k + 1$$

SE UNO DEGLI a_i VALE 1, A MENO DI RIPERMUTARLI SI PUÒ SEMPRE SUPPORRE CHE SIA $a_{k+1} = 1$, QUINDI DA (7) SEGUE CHE

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = k$$

PER CUI LA TESI SEGUE DALL'IPOTESI INDUTTIVA.

SE INVECE TUTTI GLI a_i SONO DIVERSI DA 1, ALCUNI SARANNO

MAGGIORI DI 1 E ALTRI MINORI (GRAZIE A (7)), QUINDI, A MENO DI RIPERMUTARLI, POSSIAMO SEMPRE SUPPORRE CHE VALGA:

$$(8) \quad a_{k+1} > 1 > a_k > 0.$$

A QUESTO PUNTO, POSTO $b_{k+1} = 1$ E $b_k = a_{k+1} + a_k - 1$, SIA b_k CHE b_{k+1} SONO STRETTAMENTE POSITIVI E VERIFICANO

$$(9) \quad b_{k+1} + b_k = 1 + a_{k+1} + a_k - 1 = a_{k+1} + a_k,$$

MA SI HA:

$$(10) \quad b_{k+1} \cdot b_k > a_{k+1} \cdot a_k$$

PERCHÉ:

$$a_{k+1} a_k - b_{k+1} b_k = a_{k+1} a_k - a_{k+1} - a_k + 1 = (a_{k+1} - 1)(a_k - 1) < 0.$$

QUINDI SI HA LA TESI PERCHÉ:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{k-1} \cdot a_k \cdot a_{k+1} < a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{k-1} \cdot b_k \cdot b_{k+1} =$$

$$= a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{k-1} \cdot b_k \leq 1.$$

GRAZIE A (8)

GRAZIE A (10)

PERCHÉ $b_{k+1} = 1$

VISTO CHE: $a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + b_k =$
 $= a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + a_k + a_{k+1} - 1 = k + 1 - 1 = k$
SI PUÒ APPLICARE L'IPOTESI INDUTTIVA

II° PASSO CASO GENERALE.

DATI $a_1, a_2, \dots, a_n$ STRETTAMENTE POSITIVI, PONIAMO:

$$(11) \quad M = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

E DEFINIAMO:

$$(12) \quad A_1 = \frac{a_1}{M}, \quad A_2 = \frac{a_2}{M}, \quad \dots, \quad A_n = \frac{a_n}{M}.$$

ALLORA OTTENIAMO:

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \frac{a_1}{M} + \frac{a_2}{M} + \dots + \frac{a_n}{M} = \frac{1}{M} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = n.$$

GRAZIE A (11)

MA ALLORA, GRAZIE A CIÒ CHE ABBIAMO DIMOSTRATO NEL I° PASSO, SI HA:

(13)

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \leq 1$$

CON L'UGUAGLIANZA CHE VALE SE E SOLO SE $A_1 = A_2 = \dots = A_n = 1$.

MA ALLORA, GRAZIE A (12), LA (13) DIVENTA:

$$\frac{a_1}{M} \cdot \frac{a_2}{M} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{M} \leq 1$$

CIOE':

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq M = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

DOVE L'UGUAGLIANZA VALE SE E SOLO SE $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

OSSERVAZIONE 5

UNA VOLTA DIMOSTRATA LA SECONDA DISUGUAGLIANZA DEL TEOREMA 1, LA PRIMA E' GRATIS PERCHE' BASTA APPLICARE LA SECONDA AI NUMERI $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ E SI OTTIENE:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n}$$

DA CUI, FACENDO IL RECIPROCO IN AMBO I MEMBRI, SI OTTIENE:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

CHE E' LA TESI.

INVECE IL MODO STANDARD DI DIMOSTRARE LA TERZA DISUGUAGLIANZA DEL TEOREMA 1 E' QUELLO DI USARE LA DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ, CHE PERO' IN QUESTA LEZIONE NON FAREMO.

OSSERVAZIONE 6

E' ISTRUTTIVO SPENDERE 2 PAROLE SUL CONCETTO DI OMOGENEITA', CHE E' STATO UTILIZZATO (SENZA CITARLO ESPLICITAMENTE) NEL II° PASSO DELLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1.

QUANDO DICIAMO CHE LA FORMULA:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

È OMOGENEA INTENDIAMO DIRE CHE SE LA n -UPLA $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ LA SODDISFA, ALLORA PER OGNI $\lambda > 0$ ANCHE $(\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$ LA SODDISFA. INFATTI:

$$\sqrt[n]{\lambda a_1 \cdot \lambda a_2 \cdot \dots \cdot \lambda a_n} = \lambda \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

UGUALI

E

$$\frac{\lambda a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda a_n}{n} = \lambda \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

SI NOTI CHE IL II° PASSO DELLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1 CONSISTE, DI FATTO, NEL MOSTRARE CHE OGNI n -UPLA $(a_1, \dots, a_n)$ SI PUÒ OTTENERE MOLTIPLICANDO PER UN OPPORTUNO λ , CIOÈ $\lambda = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$, UNA n -UPLA DI NUMERI AVENTI MEDIA ARITMETICA 1.

È CHIARO QUINDI CHE BASTA DIMOSTRARE LA DISUGUAGLIANZA IN QUESTO CASO PARTICOLARE, COSA CHE VIENE FATTA NEL I° PASSO.

PROBLEMA 9 DEVO COSTRUIRE 10 RETTANGOLI ED HO 10 BASI, DI LUNGHEZZE RISPETTIVAMENTE 1, 2, 3, ..., 10 E 10 ALTEZZE, SEMPRE CON LUNGHEZZE 1, 2, 3, ..., 10. PER COSTRUIRE I 10 RETTANGOLI ACCOPPIO OGNI BASE CON UN'ALTEZZA, USANDOLE CIASCUNA UNA VOLTA SOLA. QUALI SONO, AL VARIARE DEI MODI DI FARE GLI ACCOPPIAMENTI, IL MASSIMO E IL MINIMO VALORE DELLA SOMMA DELLE AREE DEI 10 RETTANGOLI?

SOLUZIONE

USIAMO QUESTO PROBLEMA COME SCUSA PER INTRODURRE LA COSIDETTA DISUGUAGLIANZA DI RIARRANGIAMENTO, CHE ENUNCIAMO E DIMOSTRIAMO TRA UN ATTIMO.

GRAZIE A TALE DISUGUAGLIANZA IL MASSIMO E IL MINIMO CERCATI SONO:

$$\text{MAX} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \dots + 10 \cdot 10 = 385$$

$$\text{MIN} = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + \dots + 10 \cdot 1 = 220$$

TEOREMA 2 (DISUGUAGLIANZA DI RIARRANGIAMENTO)

SIANO DATE 2 n -UPLE DI NUMERI REALI $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ E $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ TALÌ CHE:

$$(14) \quad a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \quad \text{E} \quad b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$$

ALLORA, COMUNQUE SI SCELGA UNA PERMUTAZIONE σ DEGLI INDICI $1, 2, \dots, n$, SI HA:

$$(15) \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \dots + a_n b_{\sigma(n)}$$

E

$$(16) \quad a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \leq a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \dots + a_n b_{\sigma(n)}$$

DIMOSTRAZIONE

PER PRIMA COSA OSSERVIAMO CHE SIA LA (15) CHE LA (16), PER $n=2$ EQUIVALGONO A:

$$(17) \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 \geq a_1 b_2 + a_2 b_1$$

CHE È BANALMENTE VERA PERCHÈ LA DIFFERENZA TRA IL PRIMO E IL SECONDO MEMBRO È:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_1 b_2 - a_2 b_1 = \underbrace{(a_2 - a_1)}_{\geq 0} \underbrace{(b_2 - b_1)}_{\geq 0} \geq 0$$

GRAZIE A (14)

MOSTRIAMO ORA LA (15) NEL CASO GENERALE, CIOÈ CHE, AL VARIARE DELLA PERMUTAZIONE σ , L'ESPRESSIONE

$$(18) \quad a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \dots + a_n b_{\sigma(n)}$$

ASSUME VALORE MASSIMO QUANDO σ È L'IDENTITÀ, CIOÈ QUANDO $\sigma(i) = i$ PER OGNI $i = 1, \dots, n$.

A TALE SCOPO OSSERVIAMO CHE SE (18) È DELLA FORMA:

$$(19) \quad \underbrace{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_{p-1} b_{p-1}}_{\text{TERMINI GIÀ A POSTO}} + \underbrace{a_p b_{\sigma(p)}}_{\substack{\text{PRIMO TERMINE} \\ \text{TALE CHE } \sigma(p) \neq p}} + a_{p+1} b_{\sigma(p+1)} + \dots + \underbrace{a_s b_p}_{\substack{\text{P-ESIMO TERMINE} \\ \text{S-ESIMO TERMINE}}} + \dots + a_n b_{\sigma(n)}$$

GRAZIE A (17) SARÀ MINORE O UGUALE ALLA:

$$(20) \quad \overbrace{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_{p-1} b_{p-1}}^{\text{TERMINI A POSTO}} + \underbrace{a_p b_p}_{\text{P-ESIMO TERMINE}} + a_{p+1} b_{p(p+1)} + \dots + \underbrace{a_s b_{s(n)}}_{\text{S-ESIMO TERMINE}} + \dots + a_n b_{s(n)}$$

PERCHÉ TUTTI I TERMINI AZZURRI SONO RIMASTI GLI STESSI E SONO STATI MODIFICATI SOLO TERMINI ROSSI, IN MODO TALE CHE, GRAZIE ALLA (17), LA SOMMA DI QUELLI NUOVI SIA MAGGIORE O UGUALE A QUELLA DI QUELLI VECCHI.

IL FATTO CHE LA (19) SIA MINORE O UGUALE ALLA (20) SIGNIFICA CHE OGNI SOMMA DI TIPO (19), NELLA QUALE I PRIMI p INDICI SONO "A POSTO", È MINORE O UGUALE DI UN'ESPRESSIONE DELLO STESSO TIPO DOVE SONO "A POSTO" I PRIMI $p+1$ INDICI.

ITERANDO IL PROCEDIMENTO, CIOÈ METTENDO VIA VIA "A POSTO" TUTTI GLI INDICI, SI OTTIENE CHE IL MASSIMO VIENE ASSUNTO QUANDO TUTTI GLI INDICI SONO "A POSTO".

QUESTO COMPLETA LA DIMOSTRAZIONE DI (19).

LA DIMOSTRAZIONE DI (16) È DEL TUTTO ANALOGA.

OSSERVAZIONE 7 SI NOTI CHE NON C'È ALCUN BISOGNO CHE GLI a_i E I b_i SIANO POSITIVI.

OSSERVAZIONE 8 È FACILE VERIFICARE CHE, SE NELL'IPOTESI (14) SI METTONO TUTTE DISUGUAGLIANZE STRETTE, ALLORA TUTTI I PASSAGGI DELLA DIMOSTRAZIONE VALGONO ANCHE CON LE DISUGUAGLIANZE STRETTE. QUINDI ANCHE NELLE TESI (15) E (16) SI OTTENGONO LE DISUGUAGLIANZE STRETTE.
