Stage Urbi et Orbi - Exe. 1

Titolo nota

18 ottobre 2019 (16.30-18.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

www.problemisvolti.it

ARITMETICA ZERO: ALCUNI PROBLEMI DELLA GARA

PROB. 8 TROVARE IL PIÙ PICCOLO INTERO POSITIVO A TALE CHE ESISTONO DUE INTERI POSITIVI DISTINTI m E n TALI CHE $\sigma(n)=\sigma(m)=A$.

SVOLGIMENTO IL VALORE CERCATO È $A=12$.

INFATTI:

$$\sigma(11)=1+11=12$$

E

PERCHÈ SAPPIAMO CHE σ È MOLTIPLICATIVA

$$\sigma(6)=\sigma(2\cdot 3)=\sigma(2)\cdot\sigma(3)=(1+2)\cdot(1+3)=12.$$

QUINDI

$$\sigma(6)=\sigma(11)=12$$

RIMANE DA VERIFICARE CHE 12 È IL PIÙ PICCOLO VALORE CON TALE PROPRIETÀ.

A TALE SCOPO BASTA OSSERVARE CHE SE $n\geq 12$ ALLORA $\sigma(n)>12$.

MENTRE PER GLI ALTRI n SI CALCOLA ESPLICITAMENTE CHE:

$n=$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\sigma(n)=$	3	4	7	6	12	8	15	13	18	12

QUINDI NON CI SONO VALORI MINORI DI 12 CHE SIANO ASSUNTI DUE VOLTE DA σ.

CIÒ SIGNIFICA CHE 12 È IL MINIMO VALORE CON TALE PROPRIETÀ, CHE È QUANTO VOLEVAMO MOSTRARE.

COME EFFETTO COLLATERALE DI QUESTO PROBLEMA SI NOTI CHE σ (A DIFFERENZA DI π) NON È INIETTIVA.

PROB. 9 SE SI SCRIVE LA LISTA, IN ORDINE CRESCENTE, DI TUTTI I DIVISORI DI 14400, QUAL È IL 32-ESIMO NUMERO DELLA LISTA?

SVOLGIMENTO LA FATTORIZZAZIONE DI 14400 È:

$$14400 = 144 \cdot 100 = 12^2 \cdot 10^2 = (2^2 \cdot 3)^2 \cdot (2 \cdot 5)^2 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

QUINDI 14400 È IL QUADRATO DI 120 E IL NUMERO DEI SUOI DIVISORI È:

$$d(14400) = d(2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2) = 7 \cdot 3 \cdot 3 = 63$$

QUINDI, TOLTO 120, I RIMANENTI 62 DIVISORI SARANNO PER METÀ MINORI DI 120 E PER L'ALTRA METÀ MAGGIORI.

CIÒ SIGNIFICA CHE 120 È IL 32-ESIMO DIVISORE.

PROB. 12 TROVARE LA SOMMA DI TUTTI I DIVISORI PARI DI 2700.

SVOLGIMENTO È PIÙ RAPIDO TROVARE LA SOMMA DI TUTTI I DIVISORI DISPARI DI 2700 E POI TOGLIERLA ALLA SOMMA DI TUTTI I DIVISORI.

INFATTI:

$$2700 = 27 \cdot 100 = 3^3 \cdot (2 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$$

CIÒ SIGNIFICA CHE LA SOMMA DEI DIVISORI DISPARI DI 2700, CIOÈ DI $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$, COINCIDE CON LA SOMMA DI TUTTI I DIVISORI DI $3^3 \cdot 5^2$. DI CONSEGUENZA:

$$(\text{SOMMA DEI DIVISORI PARI DI } 2700) =$$
$$= (\text{SOMMA DEI DIVISORI DI } 2700) - (\text{SOMMA DEI DIVISORI DISPARI DI } 2700) =$$
$$= \sigma(2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2) - \sigma(3^3 \cdot 5^2) =$$

GRAZIE AL FATTO CHE σ È MOLTIPLICATIVA

$$= \sigma(2^2) \cdot \sigma(3^3) \cdot \sigma(5^2) - \sigma(3^3) \cdot \sigma(5^2) =$$
$$= \sigma(3^3) \cdot \sigma(5^2) \cdot (\sigma(2^2) - 1) =$$
$$= 40 \cdot 31 \cdot (7 - 1) = 7440$$

PRODOTTO DI TUTTI I DIVISORI DI n

PROB. 13 TROVARE QUANTI SONO I DIVISORI DI n SAPENDO CHE $\Pi(n) = 7^{6950}$.

SVOLGIMENTO SAPPIAMO CHE VALE LA FORMULA:

(1) $$\Pi(n) = n^{\frac{d(n)}{2}}$$

DI CONSEGUENZA I PRIMI CHE COMPAIONO NELLE FATTORIZZAZIONI DI n E $\Pi(n)$ SONO GLI STESSI.

QUINDI n È DELLA FORMA:

$$n = 7^{\alpha}$$

QUINDI LA (1) DIVENTA:

$$\Pi(n) = \Pi(7^{\alpha}) = (7^{\alpha})^{\frac{1}{2}d(7^{\alpha})} = (7^{\alpha})^{\frac{\alpha+1}{2}} = 7^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}}$$

MA SICCOME DEVE ANCHE ESSERE $\Pi(n) = 7^{6950}$, SI OTTIENE:

$$7^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}} = 7^{6950}$$

CIOÈ:

$$\frac{\alpha(\alpha+1)}{2} = 6950$$

CIOÈ:

$$\alpha(\alpha+1) = 9900$$

LA CUI UNICA SOLUZIONE INTERA POSITIVA È $\alpha = 99$.

CIÒ SIGNIFICA CHE $n = 7^{99}$ E QUINDI HA 100 DIVISORI.

PROB. 15 IN QUANTI MODI POSSO SCRIVERE 210^{11} COME DIFFERENZA DI QUADRATI?

SVOLGIMENTO SI TRATTA DI STABILIRE QUANTE SONO LE COPPIE DI INTERI NON NEGATIVI (x,y) TALI CHE:

$$x^2 - y^2 = 210^{11}$$

CIOÈ TALI CHE:

(2) $$(x+y)(x-y)=210^{10}$$

DA QUANTO GIÀ VISTO A LEZIONE, LA COPPIA (x,y) SODDISFA (2) SE E SOLO SE SODDISFA UN SISTEMA DEL TIPO

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$$

DOVE a E b SONO INTERI POSITIVI TALI CHE:

(3.1) $a \geq b$

(3.2) $a \cdot b = 210^{11}$

(3.3) a E b SONO ENTRAMBI PARI O ENTRAMBI DISPARI

LE COPPIE (a,b) SODDISFACENTI (3.1) E (3.2) SONO ESATTAMENTE LA METÀ DEI DIVISORI DI 210^{10}.

POICHÉ $210^{11}=2^{11}\cdot 3^{11}\cdot 5^{11}\cdot 7^{11}$, IL NUMERO DEI DIVISORI DI 210^{11} È:

$$d(210^{11})=d(2^{11}\cdot 3^{11}\cdot 5^{11}\cdot 7^{11})=12\cdot 12\cdot 12\cdot 12=12^4$$

QUINDI IL NUMERO DI COPPIE CHE SODDISFANO (3.1) E (3.2) È $12^3\cdot 6$.

DI QUESTE DOBBIAMO TENERE SOLO QUELLE CHE SODDISFANO ANCHE (3.3), DOBBIAMO CIOÈ BUTTARE TUTTE QUELLE IN CUI a E b SONO UNO PARI E UNO DISPARI. SICCOME, GRAZIE A (3.2), a E b NON POSSONO ESSERE ENTRAMBI DISPARI, LE COPPIE DA BUTTARE SONO TANTE QUANTI SONO I DIVISORI DISPARI DI 210^{11}, CHE SONO ESATTAMENTE I DIVISORI DI $3^{11}\cdot 5^{11}\cdot 7^{11}$, CIOÈ:

$$d(3^{11}\cdot 5^{11}\cdot 7^{11})=12\cdot 12\cdot 12=12^3.$$

LE COPPIE CHE RIMANGONO, CIOÈ QUELLE CHE SODDISFANO (3.1), (3.2) E (3.3), SONO IN TUTTO $12^3\cdot 6-12^3$, CIOÈ $12^3\cdot 5$, CIOÈ 8640.

PROB 19 TROVARE n SAPENDO CHE $\pi(n) = 60^{450}$.

SVOLGIMENTO SAPPIAMO CHE VALE LA FORMULA:

$$\pi(n) = n^{\frac{d(n)}{2}}$$

E CHE:

$$\pi(n) = 60^{450} = 2^{900} \cdot 3^{450} \cdot 5^{450}.$$

POSSIAMO QUINDI DEDURRE CHE n È DELLA FORMA:

$$n = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma}$$

CON α, β E γ CHE STANNO NELLE STESSE PROPORZIONI DI 900, 450 E 450, CIOÈ

$$\alpha = 2\beta \quad \text{E} \quad \beta = \gamma.$$

QUINDI POSSIAMO PRECISARE MEGLIO E DIRE CHE n È DELLA FORMA:

(4) $$n = 2^{2k} \cdot 3^{k} \cdot 5^{k}$$

CON k INTERO POSITIVO.

SE n È DELLA FORMA (4) ALLORA:

$$d(n) = d(2^{2k} \cdot 3^{k} \cdot 5^{k}) = (2k+1)(k+1)^2$$

E

$$\pi(n) = n^{\frac{1}{2}d(n)} = (2^{2k} \cdot 3^{k} \cdot 5^{k})^{\frac{1}{2}(2k+1)(k+1)^2} =$$

$$= 2^{k\cdot(2k+1)\cdot(k+1)^2} \cdot 3^{\frac{1}{2}k(2k+1)(k+1)^2} \cdot 5^{\frac{1}{2}k(2k+1)(k+1)^2}.$$

PER POTER OTTENERE $\pi(n) = 2^{900} \cdot 3^{450} \cdot 5^{450}$ BISOGNA CHE SIA:

$$k(2k+1)(k+1)^2 = 900$$

LA CUI UNICA SOLUZIONE INTERA POSITIVA È $k=4$.

QUINDI n È DATO DALLA (4) CON $k=4$, CIOÈ:

$$n = 2^{8} \cdot 3^{4} \cdot 5^{4} = 2^{4} \cdot 3^{4} \cdot 10^{4} = 12960000.$$

PROB. 21 TROVARE TUTTI GLI INTERI POSITIVI m PER I QUALI $2^{35}\cdot 10^m$ È IL PRODOTTO DEI DIVISORI DI UN QUALCHE n INTERO POSITIVO.

$\boxed{\text{SVOLGIMENTO}}$ SICCOME VALE LA FORMULA:

$$\Pi(n) = n^{\frac{1}{2}d(n)}$$

UN EVENTUALE n TALE CHE:

$$\Pi(n) = 2^{35}\cdot 10^m = 2^{35+m}\cdot 5^m$$

È NECESSARIAMENTE DELLA FORMA:

(5)
$$n = 2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$$

CON α E β INTERI POSITIVI TALI CHE:

$$\alpha : \beta = (35+m) : m$$

CIOÈ TALI CHE:

$$(\alpha-\beta):\beta = 35 : m$$

CIOÈ:

(6)
$$m = \frac{35\cdot\beta}{\alpha-\beta}$$

SE n È DELLA FORMA (5) ALLORA:

$$\Pi(n) = n^{\frac{1}{2}d(n)} = \left(2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}\right)^{\frac{1}{2}(\alpha+1)(\beta+1)} =$$

$$= 2^{\frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)(\beta+1)}\cdot 5^{\frac{1}{2}\beta(\alpha+1)(\beta+1)}$$

E AFFINCHÉ POSSA ESSERE $\Pi(n) = 2^{35+m}\cdot 5^m$ DEVE ESSERE:

$$\frac{1}{2}\beta(\alpha+1)(\beta+1) = m$$

CHE, GRAZIE A (6), EQUIVALE A:

$$\frac{1}{2}\beta(\alpha+1)(\beta+1)=\frac{35\beta}{\alpha-\beta}$$

CHE HA LE STESSE SOLUZIONI INTERE POSITIVE DI

(7) $$(\alpha-\beta)(\alpha+1)(\beta+1)=70$$

DISTINGUENDO I CASI AL VARIARE DI $(\alpha+1)$ TRA I DIVISORI POSITIVI DI 70 E SFRUTTANDO IL FATTO CHE $\alpha\geqslant\beta+1\geqslant2$ PER ELIMINARE RAPIDAMENTE ALCUNI CASI SI TROVA CHE LE UNICHE SOLUZIONI INTERE POSITIVE DI (7) SONO:

$$\begin{cases}\alpha=6\\ \beta=4\end{cases} \quad \text{E} \quad \begin{cases}\alpha=6\\ \beta=1\end{cases}$$

GRAZIE A (6), DALLA PRIMA SEGUE

$$m=\frac{35\cdot4}{6-4}=70$$

MENTRE DALLA SECONDA SEGUE:

$$m=\frac{35\cdot1}{6-1}=7.$$

RIASSUMENDO, GLI UNICI VALORI POSSIBILI PER m SONO 7 E 70.

PER $m=70$ SI HA $n=2^6\cdot5^4$ E $\pi(n)=2^{35}\cdot10^{70}$.

PER $m=7$ SI HA $n=2^6\cdot5$ E $\pi(n)=2^{35}\cdot10^{7}$.