Stage Urbi et Orbi - Exe. 2

Titolo nota

8 novembre 2019 (14.30-17.30) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

www.problemisvolti.it

COMBINATORIA ZERO – ALCUNI PROBLEMI DELLA GARA

PROB.12 NELLA PAROLA SPASSOSE, ALMENO DUE S SONO APPICCICATE TRA LORO. QUANTI SONO I SUOI ANAGRAMMI CON LA STESSA PROPRIETÀ?

SVOLGIMENTO INDICHIAMO COME "BUONI" GLI ANAGRAMMI CON LA PROPRIETÀ RICHIESTA E COME "CATTIVI" TUTTI GLI ALTRI.

INDICHIAMO IL LORO NUMERO, RISPETTIVAMENTE, CON n_B E n_C.

VISTO CHE IN TUTTO GLI ANAGRAMMI DI SPASSOSE SONO:

$$\frac{8!}{4!} = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 1680$$

ABBIAMO CHE:

$$n_B = 1680 - n_C$$

BASTERÀ QUINDI TROVARE n_C, CIOÈ IL NUMERO DEGLI ANAGRAMMI DI SPASSOSE IN CUI LE "S" SONO TUTTE STACCATE.

A TALE SCOPO, SE INDICHIAMO CON "□" LA POSIZIONE OCCUPATA DA UNA LETTERA DIVERSA DA "S", LE POSSIBILI CONFIGURAZIONI SONO SOLO 5:

S□S□S□S□, S□S□S□□S, S□S□□S□S, S□□S□S□S, □S□S□S□S.

A CIASCUNA DI ESSE CORRISPONDONO 24 ANAGRAMMI, CIOÈ TANTI QUANTI SONO I MODI DI PERMUTARE LE 4 LETTERE "P", "A", "O" ED "E" TRA LE 4 POSIZIONI A LORO ASSEGNATE.

IN TUTTO QUINDI GLI ANAGRAMMI CATTIVI SONO:

$$n_C = 5\cdot 24 = 120$$

E QUINDI QUELLI BUONI SONO:

$$n_B = 1680 - n_C = 1680 - 120 = 1560.$$

PROB. 16 CALCOLARE LA SOMMA ALGEBRICA DI TUTTI I COEFFICIENTI DI GRADO 5 NELLO SVILUPPO DI $\left(x+y+z+w+\frac{1}{2}-v-\frac{1}{6}\right)^9$.

SVOLGIMENTO

INDICANDO $(x+y+z+w-v)$ CON A, SI HA:

$$\left(x+y+z+w+\frac{1}{2}-v-\frac{1}{6}\right)^9=\left((x+y+z+w-v)+\frac{1}{3}\right)^9=\left(A+\frac{1}{3}\right)^9=$$

APPLICANDO IL BINOMIO DI NEWTON

$$=A^9+9A^8\cdot\frac{1}{3}+\binom{9}{2}A^7\cdot\frac{1}{3^2}+\dots+\binom{9}{4}A^5\cdot\frac{1}{3^4}+\dots+\frac{1}{3^9}$$

SI NOTI CHE I TERMINI DI GRADO 5 DI TALE SVILUPPO SONO TUTTI E SOLI QUELLI CHE DERIVANO DA $\binom{9}{4}A^5\cdot\frac{1}{3^4}$, CIOÈ DA:

(1) $$\binom{9}{4}(x+y+z+w-v)^5\cdot\frac{1}{3^4}$$

BASTERÀ QUINDI TROVARE LA SOMMA ALGEBRICA DEI COEFFICIENTI DI TUTTI I TERMINI CHE SI OTTERREBBERO SVILUPPANDO IL POLINOMIO IN 5 VARIABILI (1).

TUTTAVIA NON C'È DAVVERO BISOGNO DI SVILUPPARLO.

SE IMMAGINASSIMO DI AVERLO GIÀ SVILUPPATO, LA SOMMA DI TUTTI I SUOI COEFFICIENTI SI OTTERREBBE (OVVIAMENTE!) METTENDO "1" IN CIASCUNA VARIABILE E CALCOLANDO L'ESPRESSIONE CHE SI OTTIENE. OTTERREMMO CIOÈ CHE LA SOMMA DEI COEFFICIENTI COINCIDE COL VALORE DEL POLINOMIO VALUTATO PER $x=y=z=w=v=1$. TALE VALORE È CHIARAMENTE LO STESSO CHE OTTENIAMO DA (5), VALUTANDOLO PER $x=y=z=w=v=1$ PRIMA DI SVILUPPARLO, CIOÈ:

$$\binom{9}{4}(1+1+1+1-1)^5\cdot\frac{1}{3^4}=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot3^5\cdot\frac{1}{3^4}=378$$

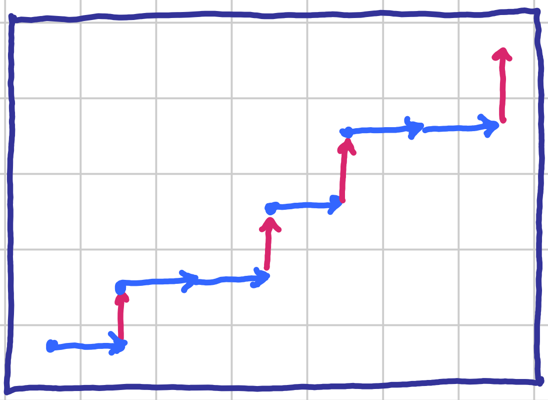
PROB. 17 LA PAROLA NINNANANNA HA LA SEGUENTE PROPRIETÀ:

COMUNQUE LA SI TAGLI IN 2 PEZZI, NEL PRIMO PEZZO (QUELLO DI SINISTRA) LE LETTERE N SONO ALMENO LA METÀ. QUANTI SONO I SUOI ANAGRAMMI CON LA STESSA PROPRIETÀ?

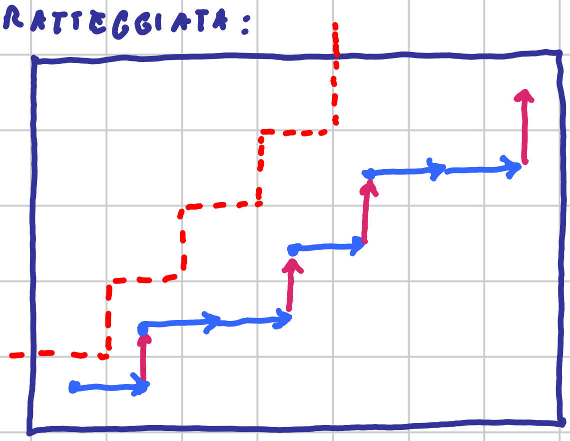
SVOLGIMENTO SUPPONIAMO, IN PRIMA ISTANZA, CHE LE LETTERE DIVERSE DA N SIANO INDISTINGUIBILI TRA LORO E INDICHIAMOLE, AD ESEMPIO, CON □.

VOGLIAMO STABILIRE QUANTE SONO LE POSSIBILI SEQUENZE DI 6 "N" E 4 "□" CHE CORRISPONDONO AD ANAGRAMMI BUONI. UN BUON MODO PER RAGIONARCI SOPRA È QUELLO DI IMMAGINARE OGNI SEQUENZA DI "N" E "□" COME UNA SEQUENZA DI PASSI SU UNA SCACCHIERA 5 × 7 DOVE AD OGNI "N" CORRISPONDE UN PASSO VERSO DESTRA ED AD OGNI "□" UN PASSO VERSO L'ALTO.

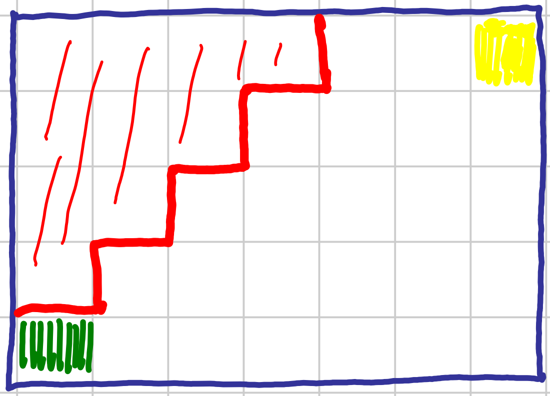
AD ESEMPIO, ALLA PAROLA N□NNN□N□NN□ CORRISPONDE IL PERCORSO:



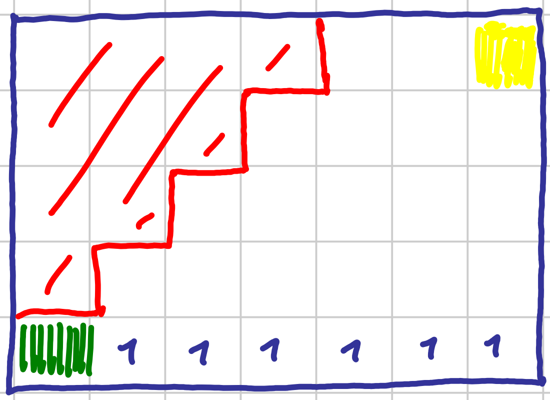
SI NOTI CHE, IN QUALSIASI ISTANTE, I PASSI GIÀ FATTI VERSO DESTRA NON SONO MAI MENO DEI PASSI GIÀ FATTI VERSO L'ALTO. CIÒ EQUIVALE A DIRE CHE IL PERCORSO NON SCAVALCA LA LINEA ROSSA TRATTEGGIATA:



I PERCORSI CHE CORRISPONDONO AD ANAGRAMMI BUONI SONO QUINDI QUELLI CHE, NELLA TABELLA SEGUENTE, VANNO DALLA CASELLA VERDE A QUELLA GIALLA, RIMANENDO SOTTO LA LINEA ROSSA:

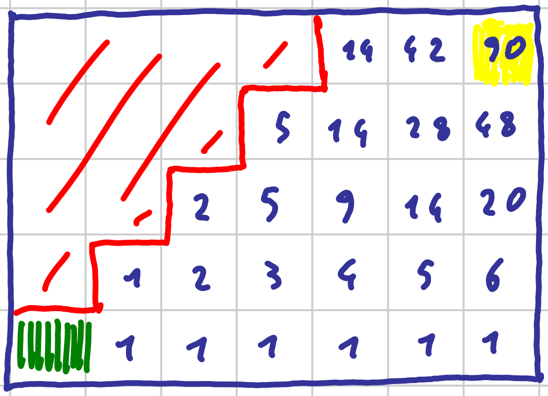


C'È UN MODO SEMPLICE DI CONTARE "A MANO" TALI PERCORSI. IMMAGINIAMO DI SCRIVERE IN OGNI CASELLA QUANTI SONO I PERCORSI CHE CI ARRIVANO PARTENDO DALLA CASELLA VERDE. NELLE CASELLE DEL BORDO INFERIORE OVVIAMENTE SCRIVERÒ "1":



PER OGNI ALTRA CASELLA C, OGNI PERCORSO CHE CI ARRIVA PASSA PER UNA E UNA SOLA DELLE CASELLE "DI ACCESSO" A C (CIOÈ LE CASELLE DALLE QUALI SI ARRIVA A C CON UN PASSO SOLO). QUINDI IL NUMERO DI PERCORSI CHE ARRIVANO IN C SI OTTIENE SOMMANDO I NUMERI DEI PERCORSI CHE ARRIVANO ALLE SUE CASELLE DI ACCESSO.

UTILIZZANDO QUESTA REGOLA TERMINIAMO DI RIEMPIRE LA TABELLA:



QUINDI I PERCORSI CHE CORRISPONDONO AD ANAGRAMMI BUONI SONO 90. A CIASCUNO DI ESSI PERÒ CORRISPONDONO 4 ANAGRAMMI PERCHÉ CI SONO 4 MODI DI DISTRIBUIRE 3 A E UNA I AI 4 POSTI □.

QUINDI IN TUTTO GLI ANAGRAMMI BUONI SONO $4 \cdot 90$ CIOÈ 360.

OSSERVAZIONE C'È UN MODO MENO "MANUALE" PER CONTARE QUANTI SONO I PERCORSI CHE CORRISPONDONO AD ANAGRAMMI BUONI. IN UNA DELLE FUTURE LEZIONI (QUELLA IN CUI PARLEREMO DEI NUMERI DI CATALAN) RICAVEREMO UNA FORMULA CHE, APPLICATA AL NOSTRO CASO, CI DIRÀ CHE TALI PERCORSI SONO:

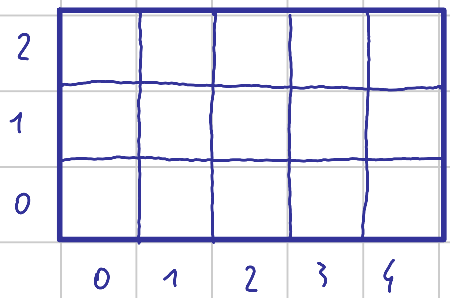
$$\binom{10}{4}-\binom{10}{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}-\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=210-120=90$$

RISULTATO CHE È IN ACCORDO CON CIÒ CHE ABBIAMO TROVATO A MANO.

PROB. 18 IN QUANTI MODI POSSO SCEGLIERE DUE DIVISORI DISTINTI DI 54000 IN MODO CHE UNO DEI DUE DIVIDA L'ALTRO?

SVOLGIMENTO PER CAPIRE MEGLIO L'IDEA, RISOLVIAMO PRIMA LO STESSO PROBLEMA CON UN NUMERO PIÙ PICCOLO: IN QUANTI MODI POSSO SCEGLIERE 2 DIVISORI DISTINTI DI 400 IN MODO CHE UNO DEI DUE DIVIDA L'ALTRO?

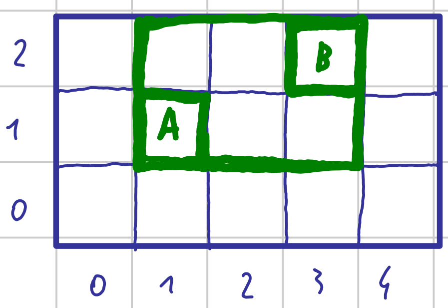
SICCOME $400 = 2^4 \cdot 5^2$ L'INSIEME DEI SUOI DIVISORI PUÒ ESSERE PENSATO COME UNA TABELLA 5×3 DOVE LA CASELLA (i,j) CORRISPONDE AL DIVISORE $2^i \cdot 5^j$, CON $i=0,1,2,3,4$ E $j=0,1,2$.

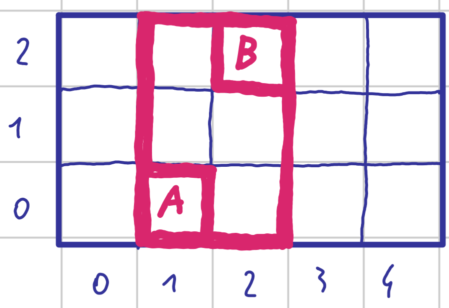


SI NOTI CHE SE $a = 2^i \cdot 5^j$ E $b = 2^k \cdot 5^h$ SONO 2 DIVISORI DI 400, DIRE CHE a DIVIDE b SIGNIFICA DIRE CHE $i \le k$ E $j \le h$, CON ALMENO UNA DELLE 2 CHE SIA STRETTA, SE VOGLIAMO CHE $a \ne b$.

SE QUINDI INDICHIAMO CON A E B, RISPETTIVAMENTE, LE CASELLE CHE CORRISPONDONO AD a E b, DIRE CHE a DIVIDE b SIGNIFICA DIRE CHE, PER PASSARE DALLA CASELLA A ALLA CASELLA B, BISOGNA SPOSTARSI A DESTRA E/O IN ALTO.

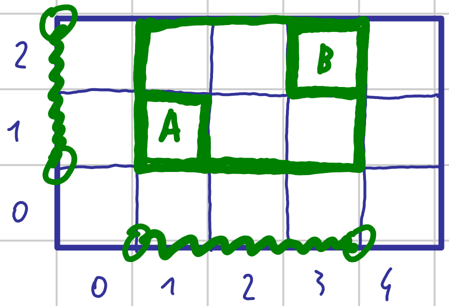
QUINDI OGNI SCELTA DI DUE DIVISORI a E b CORRISPONDE IN MODO NATURALE AD UNA SOTTOTABELLA, SCELTA COME LA PIÙ PICCOLA SOTTOTABELLA CONTENENTE LE CASELLE A E B CHE CORRISPONDONO AD a E b. AD ESEMPIO SE PRENDO $a = 2 \cdot 5$ E $b = 2^3 \cdot 5^2$ OTTENGO LA SOTTOTABELLA VERDE (VEDI FIGURA QUI SOTTO) MENTRE SE PRENDO $a = 2$ E $b = 2^2 \cdot 5^2$ OTTENGO LA SOTTOTABELLA ROSSA.





PER CONTARE I MODI DI SCEGLIERE a E b BASTERÀ QUINDI CONTARE QUANTE SONO LE SOTTOTABELLE, AVENDO CURA DI ESCLUDERE QUELLE DI UNA SOLA CASELLA, VISTO CHE $a \ne b$.

OSSERVIAMO ORA CHE UNA SOTTOTABELLA È UNIVOCAMENTE DETERMINATA DALLE "PROIEZIONI" DEI SUOI LATI:



NELL'ESEMPIO IN FIGURA VEDIAMO QUESTO MECCANISMO APPLICATO ALLA SOTTOTABELLA VERDE.

MA IN QUANTI MODI POSSO SCEGLIERE LE 2 PROIEZIONI?

QUELLA DEL LATO ORIZZONTALE PUÒ ESSERE SCELTA IN $\binom{6}{2}$ MODI, CIOÈ IN 15 MODI, PERCHÉ HO 6 PUNTI TRA CUI POSSO SCEGLIERE I 2 ESTREMI DELLA PROIEZIONE

PER QUELLA DEL LATO VERTICALE SI TROVA, RAGIONANDO ALLO STESSO MODO CHE LE SCELTE SONO $\binom{4}{2}$, CIOÈ 6.

QUINDI LE DIVERSE SOTTOTABELLE SONO $15\cdot 6$, CIOÈ 90.

ADESSO VANNO TOLTE LE 15 SOTTOTABELLE COSTITUITE DA UNA CASELLA SOLA, QUINDI NE RESTANO 75.

QUESTO CONCLUDE LA SOLUZIONE DELLA VERSIONE SEMPLIFICATA DEL NOSTRO PROBLEMA, QUELLA CON $n=400$.

PASSIAMO ORA AL PROBLEMA INIZIALE, QUELLO CON $n=54000$.

SI HA:

$$54000 = 54\cdot 10^3 = 2\cdot 3^3\cdot (2\cdot 5)^3 = 2^4\cdot 3^3\cdot 5^3$$

QUINDI I SUOI DIVISORI SONO TUTTI E SOLI I NUMERI DELLA FORMA $2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot 5^\gamma$, CON $\alpha=0,1,2,3,4$, $\beta=0,1,2,3$ E $\gamma=0,1,2,3$.

RAGIONANDO COME PRIMA, L'INSIEME DEI DIVISORI DI 54000 PUÒ ESSERE MESSO IN CORRISPONDENZA BIUNIVOCA CON UNA TABELLA TRIDIMENSIONALE $5\times 4\times 4$ E, ANCHE STAVOLTA, RISOLVERE IL NOSTRO PROBLEMA EQUIVALE A CONTARE LE SOTTOTABELLE COSTITUITE DA PIÙ

DI UNA CASELLA. DI NUOVO, PER CONTARE LE SOTTOTABELLE, BASTA CONTARE IN QUANTI MODI SI POSSONO SCEGLIERE LE LORO PROIEZIONI IN CIASCUNA DELLE 3 DIMENSIONI OTTENENDO:

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} = 15 \cdot 10 \cdot 10 = 1500$$

QUINDI CI SONO IN TUTTO 1500 SOTTOTABELLE, DALLE QUALI DOBBIAMO TOGLIERE LE 80 CHE SONO COSTITUITE DA UNA SOLA CASELLA, OTTENENDO 1420, CHE QUINDI È LA RISPOSTA AL NOSTRO PROBLEMA.