Stage Urbi et Orbi - Exe. 3

Titolo nota

29 novembre 2019 (16.30-17.30) - docenti: Prof. **G.Marini e E.Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

www.problemisvolti.it

EQ. DIOFANTEE E CONGRUENZE – ALCUNI PROBLEMI DELLA GARA

PROB. 8 UNA PULCE, UN GRILLO E UNA CAVALLETTA SALTANO SULLA RETTA DEI NUMERI. LA PULCE PARTE DA 0 E FA SALTI DI 23 UNITÀ, IL GRILLO PARTE DA 1 E FA SALTI DI 17 UNITÀ E LA CAVALLETTA PARTE DA -1 E FA SALTI DI 19 UNITÀ. QUAL È IL MINIMO INTERO POSITIVO TOCCATO DA TUTTI?

SVOLGIMENTO POICHÈ LA PULCE PARTE DA 0 E FA SALTI DI 23, TOCCA TUTTI E SOLI GLI x CHE SODDISFANO:

(1) $$x \equiv 0 \pmod{23}$$

ANALOGAMENTE IL GRILLO TOCCA TUTTI E SOLI GLI x CHE SODDISFANO

(2) $$x \equiv 1 \pmod{17}$$

E LA CAVALLETTA QUELLI DEL TIPO:

(3) $$x \equiv -1 \pmod{19}$$

SI VEDE SUBITO CHE 18 SODDISFA SIA (2) CHE (3) QUINDI, GRAZIE AL TEOREMA CINESE DEL RESTO, IL SISTEMA DI (2) E (3) EQUIVALE A:

$$x \equiv 18 \pmod{17 \cdot 19}$$

CIOÈ GLI x TOCCATI SIA DAL GRILLO CHE DALLA CAVALLETTA SONO DELLA FORMA:

(4) $$x = 18 + 17 \cdot 19 \cdot k \quad \text{CON } k \text{ INTERO.}$$

SI TRATTA ORA DI STABILIRE PER QUALI k GLI x DELLA FORMA (4) SONO TOCCATI ANCHE DALLA PULCE.

A TALE SCOPO BASTA SOSTITUIRE (4) IN (1) OTTENENDO:

$$18 + 17 \cdot 19 k \equiv 0 \pmod{23}$$

CIOÈ: $$(-6) \cdot (-4) k \equiv -18 \pmod{23}$$

CIOÈ: $$24 k \equiv 5 \pmod{23}$$

CIOÈ: $$k \equiv 5 \pmod{23}$$

CHE È COME DIRE: $k = 5 + 23\cdot h$ CON h INTERO.

CHE, SOSTITUITO IN (4), CI FA OTTENERE:

(5) $$x = 18 + 17\cdot 19\cdot(5+23h) = 18 + 17\cdot 19\cdot 5 + 17\cdot 19\cdot 23h = 1633 + 7429h$$

QUINDI GLI x TOCCATI DA TUTTI E TRE GLI INSETTI SONO TUTTI E SOLI QUELLI DEL TIPO (5) CON h INTERO.

QUINDI IL MINIMO VALORE POSITIVO SI OTTIENE PER $h=0$ ED È $x = 1633$.

PROB. 13 TROVARE IL MASSIMO TRA I VALORI CHE COMPAIONO COME ASCISSA O ORDINATA DI UN PUNTO DI COORDINATE INTERE CHE SODDISFI L'EQUAZIONE $40x^2+21y^2-58xy-29=0$.

SVOLGIMENTO RISCRIVIAMO MEGLIO L'EQUAZIONE:

$$40x^2 - 58xy + 21y^2 = 29$$

$$40x^2 - 30xy - 28xy + 21y^2 = 29$$

$$10x\cdot(4x-3y) - 7y\cdot(4x-3y) = 29$$

CIOÈ:

(6) $$(4x-3y)\cdot(10x-7y) = 29$$

POICHÈ x E y SONO INTERI, ANCHE $4x-3y$ E $10x-7y$ LO SONO, QUINDI, PER OTTENERE 29 DAL LORO PRODOTTO, BISOGNA CHE SI VERIFICHI UNO DEI SEGUENTI 4 CASI:

1 $\begin{cases} 4x-3y=29 \\ 10x-7y=1 \end{cases}$ 2 $\begin{cases} 4x-3y=1 \\ 10x-7y=29 \end{cases}$ 3 $\begin{cases} 4x-3y=-29 \\ 10x-7y=-1 \end{cases}$ 4 $\begin{cases} 4x-3y=-1 \\ 10x-7y=-29 \end{cases}$

LE CUI SOLUZIONI SONO, RISPETTIVAMENTE: $(-100,-143)$, $(40,53)$, $(100,143)$ E $(-40,-53)$.

QUINDI LA RISPOSTA CERCATA È 143.

PROB. 22 TROVARE LE ULTIME 4 CIFRE DEL NUMERO $2^{3^{5^{7^{11^{13^{\cdots^{97}}}}}}}$, DOVE SONO STATI USATI TUTTI E SOLI I NUMERI PRIMI MINORI DI 100.

SVOLGIMENTO DOBBIAMO TROVARE IL RESTO $\bmod\ 10000$ DEL NUMERO ASSEGNATO.

GRAZIE AL TEO. CINESE DEL RESTO E SUFFICIENTE TROVARNE I RESTI $\bmod 16$ E $\bmod 625$. IL PRIMO È BANALMENTE 0 PERCHÉ IL NUMERO ASSEGNATO È UNA POTENZA DI 2 CON ESPONENTE ENORME.

CONCENTRIAMOCI SUL SECONDO, INTRODUCENDO IL:

$\boxed{\text{PROB. AUSILIARIO 1}}$

TROVARE A, CON $0 \leq A \leq 624$, TALE CHE $2^{3^{5^{7^{11^{\cdots^{97}}}}}} \equiv A \pmod{625}$.

MA GRAZIE AL TEOREMA DI EULERO SAPPIAMO CHE:

$$2^{3^{5^{7^{11^{\cdots^{97}}}}}} \equiv 2^{B} \pmod{625}$$

SE B È UN INTERO POSITIVO TALE CHE:

$$3^{5^{7^{11^{\cdots^{97}}}}} \equiv B \pmod{\varphi(625)}$$

MA ALLORA, POICHÉ $\varphi(625)=500$, DOBBIAMO RISOLVERE IL:

$\boxed{\text{PROB. AUSILIARIO 2}}$

TROVARE B, CON $0 \leq B \leq 499$, TALE CHE $3^{5^{7^{11^{\cdots^{97}}}}} \equiv B \pmod{500}$.

SEMPRE GRAZIE AL TEO. DI EULERO SAPPIAMO CHE:

$$3^{5^{7^{11^{\cdots^{97}}}}} \equiv 3^{C} \pmod{500}$$

SE C È UN INTERO POSITIVO TALE CHE:

$$5^{7^{11^{\cdots^{97}}}} \equiv C \pmod{\varphi(500)}$$

QUINDI, POICHÉ $\varphi(500)=200$, BASTA RISOLVERE IL:

$\boxed{\text{PROB. AUSILIARIO 3.}}$

TROVARE C, CON $0 \leq C \leq 199$, TALE CHE $5^{7^{11^{\cdots^{97}}}} \equiv C \pmod{200}$.

MA QUEST'ULTIMO PROBLEMA SI RISOLVE IN FRETTA PERCHÉ mod 200 ABBIAMO:

$$5^3 = 125 \equiv 125$$

$$5^4 = 625 \equiv 25$$

$$5^5 = 5 \cdot 5^4 \equiv 5 \cdot 25 = 125$$

$$5^6 = 5 \cdot 5^5 \equiv 5 \cdot 125 = 625 \equiv 25$$

$$\vdots$$

$$5^{\text{DISPARI}} \equiv 125$$

$$5^{\text{PARI}} \equiv 25$$

DI CONSEGUENZA:

$$5^{7^{11^{\cdots^{97}}}} \equiv 125 \pmod{200}$$

E QUINDI IL VALORE RICHIESTO NEL $\boxed{\text{PROB. AUSILIARIO 3}}$ È $C = 125$.

MA ALLORA ADESSO POSSIAMO RISOLVERE IL $\boxed{\text{PROB. AUSILIARIO 2}}$ E TROVARE B PERCHÉ SAPPIAMO CHE mod 500 SI HA:

$$B \equiv 3^{125} = 3 \cdot 3^{124} = 3 \cdot 9^{62} = 3 \cdot (-9)^{62} = 3 \cdot (1-10)^{62} =$$

$$= 3 \cdot \left(1 - 62 \cdot 10 + \binom{62}{2} \cdot 100 + (\text{MULTIPLI DI } 1000)\right) \equiv$$

$$\equiv 3 \cdot (1 - 620 + 31 \cdot 61 \cdot 100) \equiv$$

$$\equiv 3 \cdot (1 - 120 + 100) = -57 \equiv 443$$

QUINDI IL VALORE RICHIESTO NEL $\boxed{\text{PROB. AUSILIARIO 2}}$ È $B = 443$.

POSSIAMO ORA RISOLVERE IL $\boxed{\text{PROB. AUSILIARIO 1}}$ E TROVARE A PERCHÉ mod 625 SAPPIAMO CHE:

$$A \equiv 2^{443} = 2 \cdot 2^{442} = 2 \cdot 4^{221} = -2 \cdot (-4)^{221} = -2 \cdot (1-5)^{221} =$$

$$= -2 \cdot \left(1 - 221 \cdot 5 + \binom{221}{2} \cdot 5^2 - \binom{221}{3} \cdot 5^3 + (\text{MULTIPLI DI } 625)\right) \equiv$$

$$\equiv -2 + 2210 - 221 \cdot 220 \cdot 25 + 221 \cdot 220 \cdot 73 \cdot 125 \equiv$$

$$\equiv -2 - 290 - (-4)(-5) \cdot 25 + 0 =$$

$$= -292 - 500 = -792 \equiv 458$$

QUINDI IL VALORE RICHIESTO NEL $\boxed{\text{PROB. AUSILIARIO 2}}$ È $A = 458$.

A QUESTO PUNTO POSSIAMO CONCLUDERE PERCHÉ, SE INDICHIAMO CON x

IL NUMERO ASSEGNATO, QUELLO CHE ABBIAMO TROVATO È CHE:

(7) $$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{16} \\ x \equiv 458 \pmod{625} \end{cases}$$ (8)

SICCOME LA (8) EQUIVALE A:

(9) $$x = 458 + 625k \quad \text{CON } k \text{ INTERO}$$

SOSTITUENDO NELLA (7) SI OTTIENE:

$$458 + 625k \equiv 0 \pmod{16}$$

CIOÈ:

$$10 + k \equiv 0 \pmod{16}$$

CIOÈ:

$$k \equiv 6 \pmod{16}$$

CIOÈ:

$$k = 6 + 16 \cdot h \quad \text{CON } h \text{ INTERO}$$

CHE SOSTITUITA NELLA (9) CI FA OTTENERE:

$$x = 458 + 625 \cdot (6 + 16 \cdot h) = 4208 + 10000h$$

DA CUI DEDUCIAMO CHE LE ULTIME 4 CIFRE DI x SONO 4208.