Stage Urbi et Orbi - Lez. 1A

Titolo nota

4 ottobre 2019 (15.00-18.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

www.problemisvolti.it

ARITMETICA ZERO

PER COMINCIARE ECCO LA LISTA DEI PRIMI QUESITI AFFRONTATI A LEZIONE, CHE SONO DEL TUTTO ANALOGHI A QUELLI SVOLTI NELLE PRIME 4 PAGINE DELLA LEZIONE 1 DEL 2018, ALLA QUALE SI RIMANDA, PER GLI SVOLGIMENTI E LE NOTAZIONI. SI CONSIGLIA LO STUDENTE DI LEGGERE LE 4 PAGINE INIZIALI DELLA LEZIONE VECCHIA E POI DI SVOLGERE COME ESERCIZI LA LISTA FATTA NEL 2019, CHE METTIAMO QUI DI SEGUITO:

SIGNIFICA "PRODOTTO DEI DIVISORI DI 144"

SIGNIFICA: NUMERO DEI DIVISORI DI n

PROB. 1 CALCOLARE $\Pi(144)$ [RISPOSTA: 12^{15}]

GENERALIZZAZIONE 1 SE n È UN QUADRATO PERFETTO: $\Pi(n) = (\sqrt{n})^{d(n)}$ $(*)$

PROB. 2 CALCOLARE $\Pi(280)$ [RISPOSTA: 280^{8}]

GENERALIZZAZIONE 2 SE n NON È UN QUADRATO PERFETTO: $\Pi(n) = n^{\frac{d(n)}{2}}$ $(\circledast)$

OSSERVAZIONE 1 LE FORMULE $(*)$ E $(\circledast)$ SONO IN REALTÀ LA STESSA.

PROB. 3 CALCOLARE $\Pi(81000)$ [RISPOSTA: 81000^{40}]

OSSERVAZIONE 2 SE LA SCOMPOSIZIONE DI n IN FATTORI PRIMI È $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ ALLORA $d(n) = (\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot \ldots \cdot(\alpha_k+1)$

SIGNIFICA: SOMMA DEI DIVISORI DI 1024

PROB. 4 CALCOLARE $\sigma(1024)$, CIOÈ $\sigma(2^{10})$ [RISPOSTA: $2^{11}-1$, CIOÈ 2047]

GENERALIZZAZIONE 3 SE $n = p^{\alpha}$ CON p PRIMO ALLORA $\sigma(n) = \dfrac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$

OSSERVAZIONE 3 PER RISOLVERE IL PROB. 4 E LA SUA GENERALIZZAZIONE BISOGNA PRIMA DIMOSTRARE LA FORMULA $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

DEL PROBLEMA SUCCESSIVO, ANCHE SE DEL TUTTO ANALOGO AL PROB. 4 DELLA LEZIONE 1 DEL 2018, RIPORTIAMO LO SVOLGIMENTO IN DETTAGLIO, PERCHÉ QUESTO CI PERMETTERÀ DI FARE UN'OSSERVAZIONE.

PROB. 5 CALCOLARE $\sigma(8000)$.

SVOLGIMENTO STAVOLTA 8000 NON È POTENZA DI UN PRIMO, PERCHÈ

$$8000 = 2^6 \cdot 5^3$$

QUINDI NON SI PUÒ USARE LA FORMULA DELLA **GENERALIZZAZIONE 3**.

OSSERVIAMO PERÒ CHE I DIVISORI DI 8000 SONO TUTTI E SOLI I NUMERI DELLA FORMA:

$$2^\alpha \cdot 5^\beta \quad \text{CON } \alpha = 0,1,\dots,6 \text{ E } \beta = 0,1,2,3.$$

ALLORA LA LORO SOMMA $\sigma(8000)$ È DATA DA:

$$\begin{aligned}
\sigma(8000) = {} & 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^6 + \\
& + 1\cdot 5 + 2\cdot 5 + 2^2\cdot 5 + \dots + 2^6\cdot 5 + \\
& + 1\cdot 5^2 + 2\cdot 5^2 + 2^2\cdot 5^2 + \dots + 2^6\cdot 5^2 + \\
& + 1\cdot 5^3 + 2\cdot 5^3 + 2^2\cdot 5^3 + \dots + 2^6\cdot 5^3 = \\
= {} & 1\cdot(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^6) + \\
& + 5\cdot(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^6) + \\
& + 5^2\cdot(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^6) + \\
& + 5^3\cdot(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^6) = \\
= {} & (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^6)\cdot(1 + 5 + 5^2 + 5^3) = \sigma(2^6)\cdot\sigma(5^3)
\end{aligned}$$

A QUESTO PUNTO ABBIAMO VINTO PERCHÈ CI SIAMO RICONDOTTI AL CASO IN CUI ABBIAMO LA POTENZA DI UN PRIMO. SI HA:

$$\sigma(2^6) = \frac{2^7 - 1}{2 - 1} = 127$$

$$\sigma(5^3) = \frac{5^4 - 1}{5 - 1} = 156$$

QUINDI

$$\sigma(8000) = \dots = \sigma(2^6)\cdot\sigma(5^3) = 127 \cdot 156 = 19812$$

PROB. 6 CALCOLARE $\sigma(100200100)$.

SVOLGIMENTO SCOMPONENDO IN FATTORI PRIMI 100200100 SI OTTIENE:

$$100200100 = 1002001 \cdot 100 =$$
$$= (10^6 \cdot 2 \cdot 10^3 + 1) \cdot 100 =$$
$$= (10^3+1)^2 \cdot 100 =$$
$$= (10+1)^2 (10^2 - 10 + 1)^2 \cdot 100 =$$
$$= 11^2 \cdot 91^2 \cdot 100 =$$
$$= 11^2 \cdot (7 \cdot 13)^2 \cdot (2 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2$$

RICORDANDO CHE NEL **PROB 5** ERAVAMO RIUSCITI A GIUSTIFICARE IL PASSAGGIO:

$$\sigma(8000) = \sigma(2^6 \cdot 5^3) = \dots = \sigma(2^6) \cdot \sigma(5^3)$$

CI PIACEREBBE POTER DIRE CHE VALE ANCHE IL PASSAGGIO

$$\sigma(100200100) = \sigma(2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2) = \dots = \sigma(2^2) \cdot \sigma(5^2) \cdot \sigma(7^2) \cdot \sigma(11^2) \cdot \sigma(13^2)$$

FORTUNATAMENTE CIÒ È POSSIBILE GRAZIE AL TEOREMA CHE DIMOSTREREMO TRA POCO, COSICCHÉ POTREMO CONCLUDERE DICENDO:

$$\sigma(100200100) = \dots = \sigma(2^2) \cdot \sigma(5^2) \cdot \sigma(7^2) \cdot \sigma(11^2) \cdot \sigma(13^2) =$$
$$= \frac{2^3-1}{2-1} \cdot \frac{5^3-1}{5-1} \cdot \frac{7^3-1}{7-1} \cdot \frac{11^3-1}{11-1} \cdot \frac{13^3-1}{13-1} =$$
$$= 7 \cdot 31 \cdot 57 \cdot 133 \cdot 183 = 301049091.$$

INTRODUCIAMO ORA LE NOZIONI TEORICHE PER GIUSTIFICARE IL PASSAGGIO APPENA FATTO NELLO SVOLGIMENTO DEL **PROB. 6**

DEFINIZIONE 1 DATA UNA FUNZIONE f CHE AD OGNI INTERO POSITIVO ASSOCI UN INTERO POSITIVO, DIREMO CHE f È MOLTIPLICATIVA SE $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$, TUTTE LE VOLTE CHE a E b SONO COPRIMI.

SIGNIFICA CHE NON HANNO FATTORI IN COMUNE

TEOREMA 1 LA FUNZIONE $\sigma(a)$ = SOMMA DI TUTTI I DIVISORI DI a È MOLTIPLICATIVA, CIOÈ SE a E b SONO COPRIMI SI HA $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$.

DIMOSTRAZIONE DIRE CHE a E b SONO COPRIMI EQUIVALE A DIRE CHE I PRIMI CHE COMPAIONO NELLA FATTORIZZAZIONE DI a SONO DIVERSI DA TUTTI QUELLI CHE COMPAIONO NELLA FATTORIZZAZIONE DI b.

QUINDI:

(1) $$a \cdot b = \overbrace{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}}^{\boxed{\text{FATTORIZZAZIONE DI } a}} \cdot \overbrace{q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot q_m^{\beta_m}}^{\boxed{\text{FATTORIZZAZIONE DI } b}}$$

DOVE OGNI p_i È DIVERSO DA OGNI q_j.

IL GENERICO DIVISORE d DI $a \cdot b$ SARÀ DELLA FORMA:

(2) $$d = \overbrace{p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\gamma_n}}^{\text{DIVISORE DI } a} \cdot \overbrace{q_1^{\delta_1} \cdot q_2^{\delta_2} \cdot \ldots \cdot q_m^{\delta_m}}^{\text{DIVISORE DI } b}$$

DOVE OGNI ESPONENTE DELLA (2) È MINORE O UGUALE DEL CORRISPONDENTE ESPONENTE DELLA (1).

OGNI DIVISORE DI $a \cdot b$ SI PUÒ QUINDI OTTENERE IN UNO E UN SOLO MODO COME PRODOTTO DI UN DIVISORE DI a E UN DIVISORE DI b.

D'ALTRA PARTE È OVVIO CHE MOLTIPLICANDO UN DIVISORE DI a CON UNO DI b OTTENGO UN DIVISORE DI $a \cdot b$.

QUINDI SE PONIAMO:

INSIEME DI TUTTI I DIVISORI DI $a = A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$

INSIEME DI TUTTI I DIVISORI DI $b = B = \{b_1, b_2, \ldots, b_h\}$

OTTERREMO CHE TUTTI I PRODOTTI DEL TIPO $a_i \cdot b_j$, CON a_i ELEMENTO DI A E b_j ELEMENTO DI B, SONO DISTINTI TRA LORO E COSTITUISCONO L'INSIEME DI TUTTI E SOLI I DIVISORI DI $a \cdot b$, OVVERO:

INSIEME DI TUTTI I DIVISORI DI $a \cdot b = \{a_i \cdot b_j \mid a_i \in A, b_j \in B\}$

DI CONSEGUENZA:

$$\sigma(a\cdot b) = \left(\text{SOMMA DI TUTTI I DIVISORI DI } a\cdot b\right) =$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_1 + \dots + a_k b_1 +$$
$$+ a_1 b_2 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_2 +$$
$$\vdots$$
$$+ a_1 b_h + a_2 b_h + \dots + a_k b_h =$$

$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_k)\cdot b_1 +$$
$$+ (a_1 + a_2 + \dots + a_k)\cdot b_2 +$$
$$\vdots$$
$$+ (a_1 + a_2 + \dots + a_k)\cdot b_h =$$

$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_k)\cdot(b_1 + b_2 + \dots + b_h) = \sigma(a)\cdot\sigma(b).$$

RIASSUMENDO: SE a E b SONO COPRIMI ALLORA $\sigma(a\cdot b) = \sigma(a)\cdot\sigma(b)$,

CHE È CIÒ CHE VOLEVAMO DIMOSTRARE.

COROLLARIO 1 SE LA FATTORIZZAZIONE DI n È $n = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdots p_k^{\alpha_k}$

ALLORA $\sigma(n) = \sigma(p_1^{\alpha_1})\cdot\sigma(p_2^{\alpha_2})\cdot\sigma(p_3^{\alpha_3})\cdot\ldots\cdot\sigma(p_k^{\alpha_k})$.

DIMOSTRAZIONE

APPLICANDO RIPETUTAMENTE IL **TEOREMA 1** SI HA:

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}) =$$

PERCHÉ $p_1^{\alpha_1}$ E $p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ SONO COPRIMI

$$= \sigma(p_1^{\alpha_1})\cdot\sigma(p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}) =$$

PERCHÉ $p_2^{\alpha_2}$ E $p_3^{\alpha_3}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ SONO COPRIMI

$$= \sigma(p_1^{\alpha_1})\cdot\sigma(p_2^{\alpha_2})\cdot\sigma(p_3^{\alpha_3}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}) =$$
$$\vdots$$
$$= \sigma(p_1^{\alpha_1})\cdot\sigma(p_2^{\alpha_2})\cdot\sigma(p_3^{\alpha_3})\cdot\ldots\cdot\sigma(p_k^{\alpha_k})$$

CHE È QUANTO VOLEVAMO DIMOSTRARE.

OSSERVAZIONE 4 (PER L'INSEGNANTE) NELLA LEZIONE 1 DEL 2018, PER RISOLVERE L'ANALOGO DEL **PROB. 6** AVEVO ADOTTATO UN APPROCCIO DIVERSO: PER EVITARE DI INTRODURRE IL CONCETTO DI FUNZIONE MOLTIPLICATIVA PAGAVO IL PREZZO DI UN APPESANTIMENTO DAL PUNTO DI VISTA COMPUTAZIONALE. NON MI È BEN CHIARO QUALE DEI 2 APPROCCI SIA RISULTATO MENO SGRADITO AGLI STUDENTI, TUTTAVIA MI È PARSO CHE GLI STUDENTI CHE AVEVANO GIÀ SEGUITO LO SCORSO ANNO, E QUINDI ERANO GIÀ PIÙ "MATURI" ABBIANO GRADITO DI PIÙ L'APPROCCIO PIÙ TEORICO DI QUEST'ANNO. TEMO TUTTAVIA CHE PER I "NOVIZI" FOSSE MIGLIORE L'APPROCCIO PIÙ "COMPUTAZIONALE" DELLO SCORSO ANNO.

LA LEZIONE PROSEGUE CON ALCUNI PROBLEMI SUL CALCOLO DEL MCD. QUANDO LO SVOLGIMENTO È DEL TUTTO ANALOGO A QUELLO DI UN PROBLEMA GIÀ SVOLTO NEL 2018 MI LIMITO A SEGNALARE IL RIFERIMENTO SENZA RISCRIVERE LO SVOLGIMENTO.

PROB. 7 CALCOLARE $MCD(265327, 265226)$ [RISPOSTA: 101]

PROB. 8 CALCOLARE $MCD(30005, 9999)$ [RISPOSTA: 1]

OSSERVAZIONE 5 ALGORITMO EUCLIDEO PER MCD.

GLI SVOLGIMENTI SONO DEL TUTTO ANALOGHI A QUELLI DEI PROBLEMI 7 E 8 DELLA LEZIONE 1 DEL 2018.

PROB. 9 CALCOLARE $MCD(65000, 22000)$

SVOLGIMENTO BASTA OSSERVARE CHE:

$$65000 = 65 \cdot 1000 \qquad \text{E} \qquad 22000 = 22 \cdot 1000$$

E CHE $MCD(65,22) = 1$, PER OTTENERE CHE L'MCD CERCATO È 1000.

PIÙ IN GENERALE SI RICORDI LA SEMPLICE PROPRIETÀ:

$$MCD(ka, kb) = k\, MCD(a,b)$$

PROB. 10 CALCOLARE $MCD(132396, 2153)$.

SVOLGIMENTO OSSERVIAMO CHE:

$$132396 = 132000 + 396 = 132 \cdot 1000 + 132 \cdot 3 = 132 \cdot 1003$$

SI NOTA SUBITO CHE 132 E 1003 PERCHÈ $132 = 12 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$ MENTRE 1003 NON È DIVISIBILE NÈ PER 2, NÈ PER 3, NÈ PER 11.

QUINDI ABBIAMO:

PERCHÈ, ESSENDO 132 E 1003 COPRIMI, OGNI POTENZA DI PRIMO CHE DIVIDA SIA $132 \cdot 1003$ CHE 2153 È DIVISORE DI 132 O DI 1003, MA NON DI ENTRAMBI.

(3) $$MCD(132396, 2153) = MCD(132 \cdot 1003, 2153) = MCD(132, 2153) \cdot MCD(1003, 2153)$$

A QUESTO PUNTO ABBIAMO NUMERI SUFFICIENTEMENTE PICCOLI DA POTER PROCEDERE IN MODO STANDARD.

PER PRIMA COSA, VISTO CHE $132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$, BASTA VERIFICARE CHE 2, 3 E 11 NON DIVIDONO 2153 PER OTTENERE:

(4) $$MCD(132, 2153) = 1$$

D'ALTRA PARTE, SICCOME $2153 : 1003 = 2$ COL RESTO DI 147, SI HA:

(5) $$MCD(1003, 2153) = MCD(1003, 147) = 1$$

PERCHÈ $147 = 3 \cdot 7^2$ E NÈ 3 NÈ 7 DIVIDONO 1003

SOSTITUENDO (4) E (5) NELLA (3) SI OTTIENE $MCD(132396, 2153) = 1$.

OSSERVAZIONE 6 DEL **PROB. 10** SI RICORDI SOPRATTUTTO L'IDEA CHE CI HA PERMESSO DI FARE IL PASSAGGIO (3), IN MODO DA RISPARMIARE MOLTI CALCOLI.
L'IDEA ERA LA SEGUENTE: SE a E b SONO COPRIMI, ALLORA, QUALSIASI SIA c SI HA:

(6) $$MCD(a \cdot b, c) = MCD(a, c) \cdot MCD(b, c)$$

QUESTO PERCHÈ OGNI FATTORE DEL TIPO p^α, CON p PRIMO, CHE DIVIDA SIA c CHE $a \cdot b$, DEVE NECESSARIAMENTE DIVIDERE a O b, MA NON ENTRAMBI, PERCHÈ SONO COPRIMI.
(SI CONFRONTI LA PROPRIETÀ (6) CON LA DEFINIZIONE DI FUNZIONE MOLTIPLICATIVA)