Stage Urbi et Orbi - Lez. 1B

Titolo nota

11 ottobre 2019 (14.30-17.30) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma *Tor Vergata*

www.problemisvolti.it

ARITMETICA ZERO (CONTINUA...)

ANCHE DI QUESTA LEZIONE RIPORTIAMO LA LISTA COMPLETA DEI PROBLEMI AFFRONTATI, MA QUANDO UN PROBLEMA È MOLTO SIMILE AD UNO GIÀ SVOLTO LO SCORSO ANNO NON NE RIPORTIAMO LO SVOLGIMENTO, MA RIMANDIAMO ALLA LEZIONE DI ARITMETICA ZERO DEL 2018.

PROB. 11 CALCOLARE $MCD(1400, 420) \cdot mcm(1400, 420)$.

SVOLGIMENTO RAGIONANDO COME NEL **PROB. 9** DELLA LEZIONE DI ARITMETICA ZERO DEL 2018 SI OTTIENE CHE:

(7) $$MCD(a,b) \cdot mcm(a,b) = a \cdot b$$

NEL NOSTRO CASO, QUINDI, IL RISULTATO È $1400 \cdot 420$, CIOÈ 588000.

PROB 12 CALCOLARE $mcm(65000, 22000)$.

SVOLGIMENTO NELLA PRIMA PARTE DI QUESTA LEZIONE (**PROB. 9**) ABBIAMO GIÀ CALCOLATO $MCD(65000, 22000) = 1000$.

DI CONSEGUENZA, GRAZIE A (7), SI OTTIENE:

$$mcm(65000, 22000) = \frac{65000 \cdot 22000}{MCD(65000, 22000)} = \frac{65000 \cdot 22000}{1000} = 1430000$$

PROB. 13 TROVARE n SAPENDO CHE $MCD(n, 3000) = 60$ E $mcm(n, 3000) = 21000$.

SVOLGIMENTO SEMPRE GRAZIE A (7) OTTENIAMO:

$$MCD(n, 3000) \cdot mcm(n, 3000) = n \cdot 3000$$

CIOÈ:

$$40 \cdot 21000 = n \cdot 3000$$

DA CUI SEGUE:

$$n = 280$$

PROB. 14 CALCOLARE $MCD(407303, 407206, 407322)$.

SVOLGIMENTO POICHÈ:

$$407322 - 407303 = 19$$

$$407303 - 407206 = 97$$

ABBIAMO:

(8) $$MCD(407303, 407206, 407322) = MCD(407303, 407206, 407322, 19, 97)$$

INFATTI SE A UNA LISTA DI NUMERI SI AGGIUNGE LA DIFFERENZA DI 2 DI ESSI ALLORA L'INSIEME DEI DIVISORI COMUNI (E QUINDI L'MCD) RIMANE LO STESSO, PERCHÈ OGNI DIVISORE COMUNE DI 2 NUMERI DIVIDE ANCHE LA LORO DIFFERENZA.

DA (8) SEGUE:

$$MCD(407303, 407206, 407322) = 1$$

PERCHÈ 19 E 97 SONO PRIMI.

OSSERVAZIONE 7 DELLA SOLUZIONE DEL PROB. 14 RICORDIAMO LA SEGUENTE IDEA:

SE A UNA LISTA DI NUMERI $a_1, a_2, \dots, a_n$ AGGIUNGIAMO UN NUMERO b, ALLORA:

(9) $$MCD(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq MCD(a_1, a_2, \dots, a_n, b)$$

PERCHÈ OGNI DIVISORE COMUNE DI $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ È ANCHE, A MAGGIOR RAGIONE, UN DIVISORE COMUNE DI $a_1, a_2, \dots, a_n$.

SE POI CAPITA CHE TUTTI I DIVISORI COMUNI DI $a_1, a_2, \dots, a_n$ DIVIDANO ANCHE b, COME AD ESEMPIO QUANDO b È LA DIFFERENZA DI 2 DEI NUMERI

DELLA LISTA $a_1, a_2, \dots, a_n$, ALLORA NELLA (9) VALE L'UGUAGLIANZA.

PROB 15 IN QUANTI MODI POSSO SCRIVERE 420 COME DIFFERENZA DI QUADRATI

SVOLGIMENTO RAGIONANDO IN MODO DEL TUTTO ANALOGO AL **PROBLEMA 11** DELLA LEZIONE DI ARITMETICA ZERO DEL 2018, SI OTTIENE CHE I MODI DI SCRIVERE 420 COME DIFFERENZA DI QUADRATI SONO 4:

$106^2 - 104^2 = 420$, $38^2 - 32^2 = 420$, $26^2 - 16^2 = 420$, $22^2 - 8^2 = 420$.

PROB 16 QUALI SONO GLI $n \leq 10000$ CHE NON SI POSSONO ESPRIMERE COME DIFFERENZA DI QUADRATI? QUAL È IL PIÙ GRANDE?

SVOLGIMENTO RAGIONANDO IN MODO DEL TUTTO ANALOGO AL **PROBLEMA 12** DELLA LEZIONE DI ARITMETICA ZERO DEL 2018, SI DIMOSTRA CHE GLI INTERI POSITIVI CHE NON POSSONO ESSERE ESPRESSI COME DIFFERENZA DI DUE QUADRATI SONO TUTTI E SOLI QUELLI DIVISIBILI PER 2 MA NON PER 4.

IL PIÙ GRANDE $n \leq 10000$ CON TALE PROPRIETÀ È $n = 9998$.

PROB 17 SAPPIAMO CHE n HA 6 DIVISORI. QUANTI SONO, AL MASSIMO I DIVISORI DI n^2?

SVOLGIMENTO SI TRATTA DEL **PROB. 7** DELLA GARA DEL 2018. UN VIDEO CON LA SUA SOLUZIONE È LINKATO NELLA PAGINA DEL MATERIALE DELLO STAGE. QUI DI SEGUITO RIPORTIAMO COMUNQUE QUELLA FATTA A LEZIONE.

SI RICORDI CHE SE $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ ALLORA IL NUMERO DI DIVISORI DI n È:

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1).$$

POICHÉ NEL NOSTRO CASO $d(n) = 6 = 2 \cdot 3$, POSSIAMO AVERE 2 SOLI CASI:

(10) $\quad d(n) = (\alpha_1 + 1)$ CON $\alpha_1 = 5$

(11) $\quad d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)$ CON $\alpha_1 = 1$ E $\alpha_2 = 2$

NEL CASO (10) LA FATTORIZZAZIONE DI n È $n=p^5$, QUINDI:

$$d(n^2)=d(p^{10})=11.$$

NEL CASO (11) LA FATTORIZZAZIONE DI n È $n=p\cdot q^2$, QUINDI

$$d(n^2)=d(p^2\cdot q^4)=3\cdot 5=15.$$

QUINDI IL VALORE MASSIMO DI $d(n^2)$ È 15.

$\boxed{\text{PROB.18}}$ SAPPIAMO CHE $d(n)=4324320$. QUANTI SONO, AL MASSIMO, I NUMERI PRIMI CHE COMPAIONO NELLA FATTORIZZAZIONE DI n?

$\boxed{\text{SVOLGIMENTO}}$ (SI TRATTA DEL PROB. 13 DELLA GARA DEL 2018)

SI PARTE SEMPRE DAL FATTO CHE SE $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ ALLORA:

(12) $$d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1)$$

MA SICCOME, NEL NOSTRO CASO, ABBIAMO

(13) $$d(n)=4324320$$

PER RISPONDERE AL QUESITO SI TRATTA DI STABILIRE QUAL È IL MASSIMO NUMERO DI FATTORI INTERI NON MINORI DI 2 CHE POSSO MOLTIPLICARE TRA LORO PER OTTENERE 4324320.

FATTORIZIAMO 4324320. SI HA:

$$4324320=432432\cdot 10=432\cdot 1001\cdot 10=$$
$$=3\cdot 144\cdot 1001\cdot 10=$$
$$=3\cdot 12^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 2\cdot 5=2^5\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13$$

QUINDI (13) DIVENTA:

$$d(n)=\overbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13}^{\text{12 FATTORI}}$$

DI CONSEGUENZA n HA AL MASSIMO 12 PRIMI NELLA SUA FATTORIZZAZIONE.

INDICA IL PRODOTTO DI TUTTI I DIVISORI DI n

PROB. 19 TROVARE n TALE CHE $\Pi(n) = 1024$.

SVOLGIMENTO RICORDIAMO CHE ABBIAMO GIÀ DIMOSTRATO LA FORMULA:

$$\Pi(n) = n^{\frac{d(n)}{2}}.$$

COME EFFETTO COLLATERALE DI TALE FORMULA, ABBIAMO CHE NELLE FATTORIZZAZIONI DI n E $\Pi(n)$ COMPAIONO GLI STESSI NUMERI PRIMI. NEL NOSTRO CASO, ESSENDO $\Pi(n) = 1024 = 2^{10}$, n SARÀ DEL TIPO:

$$n = 2^{\alpha}$$

QUINDI:

(14) $$\Pi(n) = \Pi(2^{\alpha}) = (2^{\alpha})^{\frac{d(2^{\alpha})}{2}} = (2^{\alpha})^{\frac{\alpha+1}{2}} = 2^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}}$$

RICORDANDO DUNQUE CHE:

$$\Pi(n) = 1024 = 2^{10},$$

DALLA (14) SEGUE CHE:

$$\frac{\alpha(\alpha+1)}{2} = 10$$

LA CUI UNICA SOLUZIONE INTERA POSITIVA È $\alpha = 4$.

DI CONSEGUENZA IL VALORE CERCATO PER n È:

$$n = 2^4 = 16$$

PROB. 20 TROVARE n TALE $\Pi(n) = 8000$.

SVOLGIMENTO POICHÉ $\Pi(n) = 8000 = 2^6 \cdot 5^3$, RAGIONANDO COME NEL PROBLEMA PRECEDENTE SI CONCLUDE CHE n È DELLA FORMA:

(15) $$n = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$$

INOLTRE, SICCOME:

(16) $$2^6 \cdot 5^3 = \pi(n) = n^{\frac{d(n)}{2}} = (2^\alpha \cdot 5^\beta)^{\frac{d(n)}{2}} = 2^{\alpha \cdot \frac{d(n)}{2}} \cdot 5^{\beta \cdot \frac{d(n)}{2}}$$

POSSIAMO DEDURRE CHE:

$$6 : 3 = \alpha : \beta$$

QUINDI, POSTO $\beta = k$, SI HA $\alpha = 2k$.

CIÒ SIGNIFICA POSSIAMO ESSERE PIÙ PRECISI E DIRE CHE NON SOLO n È DELLA FORMA (15), MA DELLA FORMA:

(17) $$n = 2^{2k} \cdot 5^k$$

OVVIAMENTE CON k INTERO.

DI CONSEGUENZA:

$$d(n) = d(2^{2k} \cdot 5^k) = (2k+1)(k+1)$$

QUINDI LA (16) DIVENTA:

$$2^6 \cdot 5^3 = \ldots = 2^{\alpha \cdot \frac{d(n)}{2}} \cdot 5^{\beta \cdot \frac{d(n)}{2}} = 2^{k(2k+1)(k+1)} \cdot 5^{\frac{k(2k+1)(k+1)}{2}}$$

CHE È SODDISFATTA SOLO SE

$$6 = k(2k+1)(k+1)$$

LA CUI UNICA SOLUZIONE INTERA POSITIVA È $k=1$.

SOSTITUENDO NELLA (17) SI OTTIENE:

$$n = 2^2 \cdot 5^1 = 20$$

CHE È LA SOLUZIONE CERCATA.

PROB. 20 TROVARE n TALE $\pi(n) = 1024\underbrace{000\ldots000}_{30 \text{ ZERI}}$.

SVOLGIMENTO SI HA:

(18) $$\pi(n)=1024000\ldots000=2^{10}\cdot 10^{30}=2^{40}\cdot 5^{30}$$

QUINDI, RAGIONANDO COME NEL PROBLEMA PRECEDENTE, SI OTTIENE CHE n È DELLA FORMA:

(19) $$n=2^{4k}\cdot 5^{3k}$$

CON k INTERO POSITIVO.

QUINDI: $$d(n)=d(2^{4k}\cdot 5^{3k})=(4k+1)(3k+1)$$

DI CONSEGUENZA

$$\pi(n)=n^{\frac{d(n)}{2}}=\left(2^{4k}\cdot 5^{3k}\right)^{\frac{(4k+1)(3k+1)}{2}}=2^{2k(4k+1)(3k+1)}\cdot 5^{\frac{3k(4k+1)(3k+1)}{2}}$$

CHE, CONFRONTATA CON LA (18), CI FORNISCE L'EQUAZIONE:

$$2k(4k+1)(3k+1)=40$$

LA CUI UNICA SOLUZIONE INTERA POSITIVA È $k=1$.

SOSTITUENDO $k=1$ NELLA (19) SI OTTIENE

$$n=2^4\cdot 5^3=2000$$

CHE È IL VALORE CERCATO PER n.

$\boxed{\text{OSSERVAZIONE 8}}$ SE $n\neq m$ ALLORA $\pi(n)\neq\pi(m)$, CIOÈ LA FUNZIONE $n\longmapsto \pi(n)$ È INIETTIVA.

INFATTI, SUPPONIAMO CHE:

(20) $$\pi(n)=\pi(m)=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$$

RAGIONANDO COME NEI 3 PROBLEMI PRECEDENTI, SI OTTIENE CHE n E m SONO DELLA FORMA:

(21) $$n = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$$

E

(22) $$m = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\gamma_k}$$

DOVE GLI ESPONENTI $\beta_1, \ldots, \beta_k$ E $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ STANNO NELLE STESSE PROPORZIONI DEGLI $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, OVVERO:

(23) $$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \ldots\ldots = \frac{\alpha_k}{\beta_k}$$

E

(24) $$\frac{\alpha_1}{\gamma_1} = \frac{\alpha_2}{\gamma_2} = \ldots\ldots = \frac{\alpha_k}{\gamma_k}$$

COME CONSEGUENZA DI (23) E (24), SE FOSSE $\gamma_1 > \beta_1$ ALLORA SAREBBE ANCHE $\gamma_2 > \beta_2, \ldots, \gamma_k > \beta_k$.

DI CONSEGUENZA, DA (21) E (22) SEGUIREBBE $m > n$.

INFINE SI AVREBBE ANCHE:

$$d(m) = (\gamma_1+1)(\gamma_2+1)\ldots(\gamma_k+1) > (\beta_1+1)(\beta_2+1)\ldots(\beta_k+1) = d(n)$$

SI POTREBBE QUINDI CONCLUDERE CHE:

$$\pi(m) = m^{\frac{d(m)}{2}} > n^{\frac{d(n)}{2}} = \pi(n)$$

IN CONTRADDIZIONE COL FATTO CHE $\pi(n) = \pi(m)$.

ANALOGAMENTE, SE FOSSE $\gamma_1 < \beta_1$ SI OTTERREBBE $\pi(m) < \pi(n)$, UGUALMENTE ASSURDA.

QUINDI L'UNICA POSSIBILITÀ È CHE SIA $\gamma_1 = \beta_1$.

MA GRAZIE A (23) E (24) DA CIÒ SEGUE CHE $\gamma_2 = \beta_2, \ldots, \gamma_k = \beta_k$.

E QUINDI ANCHE CHE $n = m$.

ABBIAMO QUINDI DIMOSTRATO CHE SE $\pi(n) = \pi(m)$, NECESSARIAMENTE $n = m$. QUINDI NON PUÒ SUCCEDERE CHE $n \neq m$ MA $\pi(n) = \pi(m)$.

CIÒ SIGNIFICA CHE LA FUNZIONE $n \longmapsto \pi(n)$ È INIETTIVA.

PROB 21 DIRE QUAL È IL MASSIMO VALORE DI $m \cdot n$ AL VARIARE DI TUTTI GLI INTERI POSITIVI n, m CHE SODDISFANO LA CONDIZIONE:

(25) $$\text{mcm}(m,n) + \text{MCD}(m,n) + m + n = 90$$

SVOLGIMENTO (SI TRATTA DEL PROB. 24 DELLA GARA DEL 2018)

OSSERVIAMO CHE NON PUÒ ESSERE $m=n$, ALTRIMENTI SI AVREBBE

$$\text{MCD}(n,m) = \text{mcm}(m,n) = m = n$$

E QUINDI IL PRIMO MEMBRO DI (25) DOVREBBE ESSERE UN MULTIPLO DI 4, IN CONTRADDIZIONE COL FATTO CHE DEVE ESSERE UGUALE A 90.

QUINDI $m \neq n$ E, SENZA PERDERE DI GENERALITÀ, POSSIAMO SUPPORRE CHE SIA $m > n$.

QUINDI, DETTO

(26) $$k = \text{MCD}(m,n)$$

AVREMO:

(27) $m = k\alpha$ E $n = k\beta$ CON α, β COPRIMI E $\alpha > \beta$.

INOLTRE:

(28) $$\text{mcm}(m,n) = \frac{m \cdot n}{\text{MCD}(m,n)} = \frac{k\alpha \cdot k\beta}{k} = k\alpha\beta$$

SOSTITUENDO (26), (27) E (28) IN (25), SI OTTIENE:

$$k\alpha\beta + k + k\alpha + k\beta = 90$$

CIOÈ:

(29) $$k(\alpha+1)(\beta+1) = 90$$

IL NOSTRO PROBLEMA EQUIVALE QUINDI A TROVARE IL MASSIMO DI $m \cdot n$, CIOÈ DI $k\alpha \cdot k\beta$, AL VARIARE DI TUTTI GLI INTERI POSITIVI k, α, β CHE SODDISFANO (29) E SONO TALI CHE $\alpha > \beta$, CON α E β COPRIMI.

OSSERVIAMO CHE DAL FATTO CHE $\alpha > \beta > 0$ SEGUE CHE $(\alpha+1)(\beta+1) \geq 6$

E QUINDI DA (29) SEGUE CHE k È UN DIVISORE DI 90 MINORE O UGUALE A 15. DISTINGUIAMO QUINDI I CASI:

$$k=15,\quad k=10,\quad k=9,\quad k=6 \quad \text{E} \quad k\leq 5.$$

PER $k=15$ LA (29) DIVENTA:

$$(\alpha+1)(\beta+1)=6$$

LE CUI UNICHE SOLUZIONI INTERE POSITIVE SONO $\alpha=2$ E $\beta=1$, DA CUI SEGUE:

$$m\cdot n = k\alpha\cdot k\beta = 15\cdot 2\cdot 15\cdot 1 = 450.$$

PER $k=10$ LA (29) DIVENTA:

$$(\alpha+1)(\beta+1)=9$$

LE CUI UNICHE SOLUZIONI INTERE POSITIVE SONO $\alpha=\beta=2$, CHE NON VANNO BENE PERCHÈ DEVE ESSERE $\alpha>\beta$.

PER $k=9$ LA (29) DIVENTA:

$$(\alpha+1)(\beta+1)=10$$

LE CUI UNICHE SOLUZIONI INTERE POSITIVE SONO $\alpha=4$ E $\beta=1$, DA CUI SEGUE:

$$m\cdot n = k\alpha\cdot k\beta = 9\cdot 4\cdot 9\cdot 1 = 324.$$

PER $k=6$ LA (29) DIVENTA:

$$(\alpha+1)(\beta+1)=15$$

LE CUI UNICHE SOLUZIONI INTERE POSITIVE SONO $\alpha=4$ E $\beta=2$, CHE NON VANNO BENE PERCHÈ α E β DEVONO ESSERE COPRIMI.

INFINE, PER $k\leq 5$ SI HA

$$m\cdot n = k\alpha\cdot k\beta = k\cdot k\alpha\beta < k\cdot k(\alpha+1)(\beta+1) = k\cdot 90 \leq 5\cdot 90 = 450$$

QUINDI IL MASSIMO VALORE DI $m\cdot n$ SI HA PER $k=15$ ED È 450.