

25 Ottobre 2019 - ore 15:00/18:00

Lezione 2A - Combinatoria Zero

docente: prof. Emanuele Callegari (Univ. di Roma "Tor Vergata")

La lezione si è rivelata, salvo lievissime differenze, quasi identica a un opportuno estratto dell'eserciziario di "Combinatoria Zero" che sto scrivendo in vista di un suo utilizzo nello stage.

Ho pensato quindi che la cosa più comoda, sia per me che per voi, fosse mettere on line quel piccolo estratto dell'eserciziario che corrisponde al materiale fatto a lezione.

Si tratta solo di una bozza e sarà sicuramente piena di errori (anche di grammatica!) per cui sarò molto grato a chi me li segnalerà.

Buona lettura!

Emanuele Callegari

Capitolo I

Lezione introduttiva

Per cominciare ...

Il nostro punto di partenza sono le 2 formule per le permutazioni semplici e con ripetizione. Più precisamente si consideri il seguente problema:

1. Data una parola di n lettere, tutte diverse, quanti sono i suoi anagrammi?

Gli anagrammi che ci chiede di contare il problema **1** prendono il nome di permutazioni semplici di n oggetti e si può dimostrare (anche se, per ora, ometteremo di farlo) che il loro numero è dato da:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Tale espressione si sintetizza spesso scrivendo $n!$ (si legge: *enne fattoriale*).

Ad esempio gli anagrammi della parola **NASO**, che è composta da 4 lettere tutte diverse, sono $4!$, cioè $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, cioè 24. Eccoli elencati in ordine alfabetico:

ANOS, ANSO, AONS, AOSN, ASNO, ASON,
NAOS, NASO, NOAS, NOSA, NSAO, NSOA,
OANS, OASN, ONAS, ONSA, OSAN, OSNA,
SANO, SAON, SNAO, SNOA, SOAN, SONA.

Invece gli anagrammi della parola **CINEMA**, che è composta da 6 lettere tutte diverse, sono $6!$, cioè $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, cioè 720.

Ma cosa succede se la parola di cui si vogliono contare gli anagrammi ha delle lettere che si ripetono?

Ad esempio, se prendiamo la parola **ANNA**, che ha quattro lettere come la parola **NASO**, la verifica diretta mostra che gli anagrammi non sono 24 come quelli di **NASO**, ma solo i seguenti 6:

AANN, ANAN, ANNA, NAAN, NANA, NNAA.

Più in generale consideriamo il seguente problema:

2. Sia data una parola costituita solo da due tipi di lettere (ad esempio contenente solo lettere **A** e lettere **B**) e tale che una delle due lettere vi compaia n volte e l'altra m volte. Quanti sono i suoi anagrammi?

Si può dimostrare (ma anche questa volta omettiamo momentaneamente la dimostrazione) che il numero di anagrammi che ci chiede di contare il problema **2** è:

$$\frac{(n+m)!}{n! \cdot m!}$$

Ad esempio la parola **MAMMA** è costituita da 3 lettere **M** e 2 lettere **A**, quindi i suoi anagrammi sono

$$\frac{(3+2)!}{3! \cdot 2!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = 10.$$

Il problema **2** può essere ulteriormente generalizzato considerando parole costituite da più di 2 tipi di lettere che si ripetono, come vediamo nel seguente problema:

3. Sia data una parola costituita da k tipi di lettere: n_1 uguali alla lettera X_1 , n_2 uguali alla lettera X_2 , ..., n_k uguali alla lettera X_k .
Quanti sono i suoi anagrammi?

Si può dimostrare (ma di nuovo omettiamo momentaneamente la dimostrazione) che il numero di anagrammi richiesti dal problema **3** è:

$$\frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Ad esempio la parola **BANANA** è costituita da 3 lettere **A**, 2 lettere **N** e 1 lettera **B**, quindi i suoi anagrammi sono

$$\frac{(3+2+1)!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) \cdot (1)} = 60,$$

mentre la parola **ALLATTA** è costituita da 3 lettere **A**, 2 lettere **L** e 2 lettere **T**, quindi i suoi anagrammi sono

$$\frac{(3+2+2)!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = 210.$$

Lo studente non si allarmi del fatto che abbiamo momentaneamente saltato la dimostrazione delle formule più importanti del corso. Abbiamo solo ritenuto che, almeno dal punto di vista didattico, fosse meglio posticiparle di qualche lezione, in modo da fargliele affrontare con un briciolo di maturità matematica in più.

Vogliamo invece metterlo fin da subito in condizione di risolvere problemi apparentemente molto diversi riconducendoli ai 3 problemi appena visti (soprattutto al problema **2**).

A volte la relazione sarà abbastanza semplice da trovare, mentre altre volte potrà essere più nascosta.

Tuttavia per diventare un bravo solutore di problemi questa è proprio una delle abilità da esercitare e sviluppare.

Problemi di Base (Svolti)

Quelli che seguono sono semplici, ma importanti problemi di base del calcolo combinatorio. Probabilmente lo studente conosce già alcune formule che permettono di trovare il risultato, tuttavia quello che ci preme fare ora è di mostrare come, senza alcuna formula pronta, sia possibile risolverli riconducendoli al calcolo del numero di anagrammi di un'opportuna parola.

4.

La classe 5F è composta da 14 alunni. La maestra, che è arrivata a scuola con la luna storta, per tirarsi su il morale ha deciso di sceglierne un gruppetto di 5, per interrogarli. In quanti modi diversi può farlo?

Più in generale, dato un insieme di n oggetti diversi, in quanti modi diversi posso sceglierne un sottoinsieme di k , con $0 \leq k \leq n$?

Soluzione di 4.

Dato un insieme di n oggetti, i diversi modi di sceglierne un sottoinsieme di k , prendono il nome di **combinazioni semplici** di n oggetti della classe k .

Nella discussione che segue impareremo come ricavare la formula che permette di contarle da quella, già nota, per contare gli anagrammi.

Per maggior chiarezza vediamo prima in dettaglio il caso particolare dei 5 studenti da scegliere nella classe di 14.

Per ricondurlo al calcolo degli anagrammi di un'opportuna parola, si immagini di avere la lista dei nomi dei quattordici ragazzi:

☐	Addormentata	Bella
☐	Alighieri	Dante
☐	Bonaparte	Napoleone
☐	Da Vinci	Leonardo
☐	Galilei	Galileo
☐	Pazzo	Cavallo
☐	Natale	Babbo
☐	Neve	Bianca
☐	Newton	Isacco
☐	Pilato	Ponzio
☐	Polo	Marco
☐	Seduto	Toro
☐	Turchina	Fata
☐	Verne	Giulio

Nella casella vuota che precede ciascun nome, si immagini di mettere una **S** se il ragazzo viene scelto e una **N** se il ragazzo non viene scelto.

Ad esempio, se vengono scelti **Alighieri**, **Da Vinci**, **Galilei**, **Natale**, e **Turchina**, il corrispondente modo di riempire di lettere le 14 caselle è il seguente:

Testo Destro

N	Addormentata	Bella
S	Alighieri	Dante
N	Bonaparte	Napoleone
S	Da Vinci	Leonardo
S	Galilei	Galileo
N	Pazzo	Cavallo
S	Natale	Babbo
N	Neve	Bianca
N	Newton	Isacco
N	Pilato	Ponzio
N	Polo	Marco
N	Seduto	Toro
S	Turchina	Fata
N	Verne	Giulio

Scrivendo le lettere in sequenza orizzontale nello stesso ordine della lista, si ottiene la seguente parola di 14 lettere:

NSNSSNSNNNNNSN

Ovviamente, ad ogni possibile modo di scegliere 5 alunni, corrisponde uno e un solo modo di riempire le 14 caselle con 5 lettere **S** e 9 lettere **N**, cioè una e una sola parola di 14 lettere, costituita da 5 lettere **S** e 9 lettere **N**.

Vale ovviamente anche il viceversa: ad ogni parola di 14 lettere contenente 5 lettere **S** e 9 lettere **N**, corrisponde sempre uno e un solo modo di scegliere i 5 alunni.

Ciò significa che anziché contare le scelte si possono contare le parole.

Grazie alla solita formula degli anagrammi, tali parole sono esattamente:

$$\frac{14!}{9! \cdot 5!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 14 \cdot 13 \cdot 11 = 2002.$$

Esistono quindi 2002 modi diversi di scegliere un insieme di 5 alunni da una classe di 14.

In modo del tutto analogo, se dobbiamo scegliere k oggetti da un insieme di n , possiamo sempre immaginare di avere una lista con tutti i loro nomi, davanti a ciascuno dei quali scriviamo **S** se viene scelto e **N** altrimenti.

Quindi, anche questa volta, l'insieme di tutte le possibili scelte è in corrispondenza biunivoca con l'insieme di tutte le possibili parole di n lettere contenenti k lettere **S** e $n - k$ lettere **N**. Di conseguenza, sempre utilizzando la formula per gli anagrammi, si ottiene che il numero cercato è $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ che quindi è anche il numero delle **combinazioni semplici** di n oggetti della classe k .

L'espressione $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ compare così spesso in combinatoria che si decide di dedicarle un simbolo: la si indica con $\binom{n}{k}$.

Ad esempio, quando all'inizio abbiamo calcolato in quanti modi possiamo scegliere 5 alunni da un insieme di 14, il risultato che abbiamo trovato è stato $\binom{14}{5}$, cioè 2002.

5.

Si consideri la seguente scacchiera infinita:

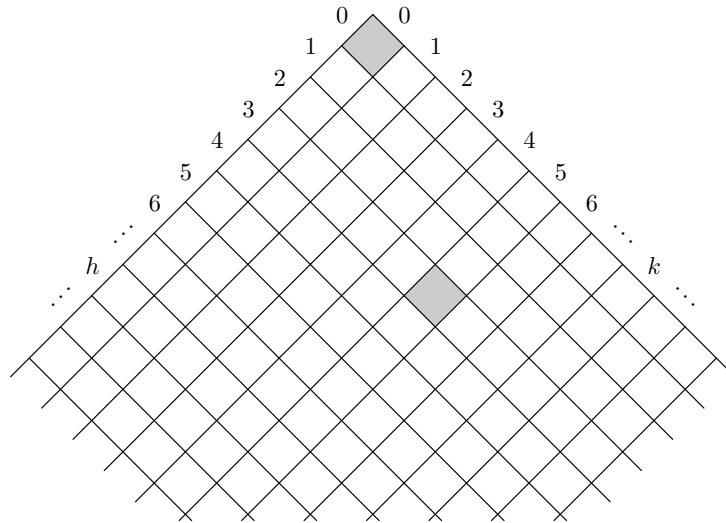


figura 1

Una pulce, partendo dalla casella $(0,0)$ vuole raggiungere la casella $(3,5)$, facendo solo due tipi di salti: spostarsi dalla casella in cui si trova a quella adiacente in basso a destra, oppure a quella adiacente in basso a sinistra. Ovviamente può fare molti percorsi diversi. Nella figura seguente ne vediamo evidenziati 2:

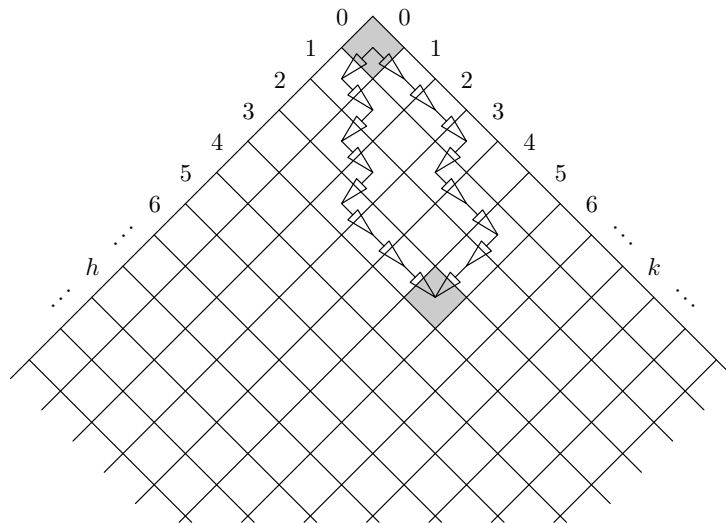


figura 2

Quanti sono in tutto i diversi percorsi che può fare?

In generale quanti sono i diversi percorsi che può fare per passare dalla casella $(0,0)$ alla generica casella (h,k) ?

Soluzione di 5.

Anche per questo problema c'è un modo naturale di mettere in corrispondenza biunivoca l'insieme da contare con l'insieme di anagrammi di un'opportuna parola.

Osserviamo infatti che per descrivere completamente un percorso basta dire, ad ogni passo, se si va in basso a destra o in basso a sinistra.

Ad esempio, se conveniamo di scrivere **D** per ogni passo in basso a destra e **S** per ogni passo in basso a sinistra, i due percorsi in figura 2 sono rappresentati dalle parole:

SDSDSDDD e **DDDSDDSS**

Osserviamo inoltre che ogni percorso che vada dalla casella $(0,0)$ alla casella $(3,5)$ deve necessariamente consistere di 3 spostamenti di tipo **S** e 5 di tipo **D**.

Quindi ci aspettiamo che l'insieme di tutti i percorsi tra $(0,0)$ e $(3,5)$ sia in corrispondenza biunivoca con l'insieme di tutte le parole di 8 lettere, costituite da 5 lettere **D** e 3 lettere **S**. Lasciamo al lettore la semplice verifica che la corrispondenza è davvero biunivoca.

Fatto ciò, per contare i percorsi, basterà contare le parole che, come sappiamo, sono $\frac{(5+3)!}{5! \cdot 3!}$, cioè 56.

Procedendo in modo del tutto analogo, nel caso generale si trova che i percorsi che vanno da $(0,0)$ a (h,k) sono $\frac{(h+k)!}{h! \cdot k!}$.

6.

Un papà ha 4 figli e 10 caramelle (identiche). In quanti modi diversi può distribuire le caramelle ai figli? (vanno contati anche i modi "ingiusti" di distribuire le caramelle, come ad esempio dare tutte le caramelle al figlio più giovane e lasciare senza tutti gli altri)
Più in generale, in quanti modi si possono distribuire n caramelle a k bambini?

Soluzione di 6.

Anche questo problema, pur in modo meno immediato, può essere ricondotto al problema del calcolo del numero di anagrammi di un'opportuna parola.

Per capire meglio, immaginiamo che i 4 figli si chiamino **Ada**, **Ugo**, **Lea** e **Isa**.

Una possibile distribuzione di caramelle è la seguente:

Ada	Ugo	Lea	Isa
• • • •	•	• • •	• •

dove, sotto il nome di ogni figlio, ci sono tanti pallini, quante sono le caramelle che ha ricevuto.

Ora, a partire da essa, formiamo una parola nel modo seguente: partendo dal primo bimbo, e procedendo in sequenza, scriviamo tante lettere **A** quante sono le caramelle date al figlio e scriviamo la lettera **B** ogni volta che passiamo al figlio successivo.

La parola che si ottiene è la seguente:

AAAABABAAABAA

Per fare qualche altro esempio, la distribuzione di caramelle:

Ada	Ugo	Lea	Isa
• •		• • • •	• • •

Testo Sinistro

corrisponde alla stringa di lettere:

AABBAAAAABAAA

mentre la distribuzione di caramelle:

Ada	Ugo	Lea	Isa
		• • • • •	• • • • •

corrisponde alla stringa di lettere:

BBAAAAABAAAAA.

In definitiva, ad ogni modo di distribuire le 10 caramelle ai 4 bimbi corrisponde in modo univoco una parola di 13 lettere costituita da 10 lettere **A** e 3 lettere **B**.

Viceversa, ad ogni possibile parola di tale tipo corrisponde in modo univoco un modo di distribuire le caramelle.

Ad esempio, alla stringa di lettere:

AABAABAAAAAAB

corrisponde la distribuzione di caramelle:

Ada	Ugo	Lea	Isa
• •	• •	• • • • •	

Di conseguenza, invece di contare quanti sono i diversi modi di distribuire le caramelle, basta contare quante sono le parole.

Grazie alla solita formula per gli anagrammi, siccome ci sono 10 lettere **A** e 3 lettere **B**, il numero di tali parole è:

$$\frac{13!}{10! \cdot 3!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 2 \cdot 11 = 286$$

Più in generale, se i bimbi fossero stati k e le caramelle da distribuire n , il numero di modi di distribuirle sarebbe stato $\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$ cioè $\binom{n+k-1}{n}$ o, equivalentemente, $\binom{n+k-1}{k-1}$.

- 7.** Dispongo di palline di 4 colori diversi: bianche, rosse, verdi e blu. Di ciascun colore ne posso avere tante quante voglio. In quanti modi diversi posso riempire un sacchetto con 10 palline? (attenzione: vanno contati anche i casi in cui non vengono usati tutti i colori, ad esempio quando si riempie il sacchetto con 10 palline tutte verdi)
Più in generale, quanti sarebbero stati i modi, se i colori diversi fossero stati p e il sacchetto avesse dovuto essere riempito con q palline?

Soluzione di 7.

In generale, i diversi modi di mettere insieme una collezione di q oggetti (le palline), scegliendoli tra p diverse categorie (i colori), accettando di poter prendere anche più oggetti della stessa categoria, prendono il nome di **combinazioni con ripetizione** di p oggetti della classe q .

In realtà si tratta solo di un altro modo di riformulare il problema **6**.

Anche questa volta cominciamo ragionando sul caso particolare di 10 palline e 4 colori.

Immaginiamo di rappresentare ogni scelta di 10 palline in modo analogo a quanto fatto nella soluzione del problema 6.

Ad esempio la scelta di 3 palline bianche, 2 rosse, 4 verdi e 1 gialla verrebbe rappresentata nel modo seguente:

Bianche	Rosse	Verdi	Gialle
• • •	• •	• • • •	•

Immaginiamo ora di far corrispondere le caramelle date ad Ada alle palline bianche, quelle date ad Ugo alle palline rosse, quelle date a Lea alle palline verdi e quelle date ad Isa alle palline gialle.

Ad esempio, alla precedente configurazione di palline, corrisponde la seguente distribuzione di caramelle:

Ada	Ugo	Lea	Isa
• • •	• •	• • • •	•

È evidente che c'è una corrispondenza biunivoca tra l'insieme che dobbiamo contare e l'insieme di tutti i modi diversi di distribuire 10 caramelle a 4 bambini, che abbiamo già contato nella soluzione del problema 6, trovando che sono $\binom{13}{3}$, cioè 286.

In modo del tutto analogo, se il sacchetto deve contenere q palline e i colori sono p , contare in quanti modi diversi lo si può riempire equivale a contare in quanti modi si possono distribuire q caramelle a p bambini.

Dalla soluzione del problema 6 sappiamo già che tali modi sono $\binom{q+p-1}{q}$ o, equivalentemente, $\binom{q+p-1}{p-1}$.

8. (Variazione del problema 6.) Un papà ha 10 caramelle (identiche). In quanti modi diversi può distribuire le caramelle ai suoi 4 figli, senza necessariamente darle tutte (può decidere di distribuirne un numero qualsiasi tra 0 e 10)?
Più in generale, in quanti modi si possono distribuire a k bambini un numero di caramelle variabile tra 0 e n ?

Soluzione di 8. Vi sono essenzialmente 2 modi di risolvere il problema, uno molto calcoloso e uno più astuto.

I modo. Se ci si butta fin da subito nei calcoli senza riflettere, si può essere tentati di risolvere il problema distinguendo tutti i casi, calcolando cioè in quanti modi posso distribuire 0 caramelle, in quanti modi 1 caramella, in quanti modi 2 caramelle, e così via, fino ad arrivare a 10 caramelle, sommando poi tutti gli 11 risultati ottenuti.

Più in dettaglio, visto che i modi di distribuire k caramelle a 4 bimbi sono $\binom{k+3}{3}$ (vedi problema 6), il numero di modi di distribuirne al massimo 10 è dato dalla seguente somma:

$$(1) \quad \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} + \binom{8}{3} + \binom{9}{3} + \binom{10}{3} + \binom{11}{3} + \binom{12}{3} + \binom{13}{3}.$$

Testo Sinistro

Infatti il primo addendo è appunto il numero di modi di distribuire 0 caramelle a 4 bimbi, il secondo 1 caramella, il terzo 2 caramelle, e così via, fino all'ultimo che è il numero di modi di distribuire tutte e 10 le caramelle ai 4 bimbi.

Divertendosi (!!) a calcolare a mano tale somma si trova come risultato 1001.

Ovviamente, se il numero di caramelle fosse stato più alto, il calcolo manuale della somma (1) sarebbe stato al di là della nostra pazienza.

Il modo. Se invece ci si sofferma un attimo a riflettere, si scopre che il modo più rapido di risolvere il problema è quello di immaginare che le caramelle non distribuite vengano date ad un quinto figlio fittizio.

Ad esempio, usando le stesse notazioni del problema 6 e immaginando che il nome del figlio fittizio sia *Nemo*, la seguente distribuzione di 7 caramelle ai 4 figli:

Ada	Ugo	Lea	Isa
• • •	•	• •	•

corrisponde alla seguente distribuzione di tutte le 10 caramelle a 5 persone:

Ada	Ugo	Lea	Isa	Nemo
• • •	•	• •	•	• • •

Si stabilisce in tal modo una corrispondenza (che si dimostra facilmente essere biunivoca) tra i modi di distribuire non più di 10 caramelle a 4 figli e i modi di distribuirne esattamente 10 a 5 figli.

Ma queste ultime, ragionando come nel problema 6, le sappiamo contare: sono $\binom{14}{4}$, cioè 1001.

Si noti che, ragionando in modo identico si conclude che il numero di modi diversi di distribuire non più di n caramelle a k bambini è uguale al numero di modi di distribuirne esattamente n a $k + 1$ bambini, cioè $\binom{n+k}{n}$.

Osservazione: I due modi diversi che abbiamo appena visto per risolvere il problema 8 ci suggeriscono uno stratagemma interessante per trovare il risultato di somme simili alla (1) senza fare davvero tutti i calcoli.

Infatti, se ci viene chiesto di calcolare una somma di questo tipo, è sufficiente inventarsi un opportuno problema di caramelle da distribuire a bimbi che abbia tale somma come "soluzione calcolosa". A quel punto, per trovare il risultato basterà risolvere nel modo furbo il problema inventato.

Per chiarire meglio la cosa, vediamo in dettaglio il problema che segue.

9. Calcolare, nel modo più breve possibile, la seguente somma:

$$\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \binom{7}{4} + \dots + \binom{19}{4} + \binom{20}{4}.$$

Soluzione di 9.

Osserviamo che:

$\binom{4}{4}$ è il numero di modi di distribuire 0 caramelle a 5 bimbi.

$\binom{5}{4}$ è il numero di modi di distribuire 1 caramella a 5 bimbi.

$\binom{6}{4}$ è il numero di modi di distribuire 2 caramelle a 5 bimbi.

$\vdots$
 $\binom{20}{4}$ è il numero di modi di distribuire 16 caramelle a 5 bimbi.

Ciò significa che la somma richiesta altro non è che il numero di modi di distribuire **non più di** 16 caramelle a 5 bimbi.

Ragionando come nel problema 8 possiamo ora concludere che il numero di modi di distribuire non più di 16 caramelle a 5 bimbi è uguale al numero di modi di distribuirne **esattamente** 16 a 6 bimbi.

Tale numero di modi sappiamo però che è $\binom{21}{5}$, cioè 20349, che è quindi anche il risultato della somma richiesta.

10.

Trovare il coefficiente di x^5y^2 nello sviluppo di $(x+y)^7$.
 Più in generale, trovare il coefficiente di x^ky^{n-k} nello sviluppo di $(x+y)^n$.

Soluzione di 10.

Quando sviluppiamo $(x+y)^7$, cioè il prodotto:

$$(2) \quad (x+y) \cdot (x+y) \cdot (x+y) \cdot (x+y) \cdot (x+y) \cdot (x+y) \cdot (x+y)$$

stiamo facendo la somma di tutti i possibili prodotti di 7 termini, ciascuno preso da uno diverso dei 7 fattori di (2).

In pratica si tratta di contare quanti di tali prodotti sono uguali a x^5y^2 . Ma questo accade se e solo se da 5 dei fattori di (2) scelgo x e dagli altri 2 scelgo y , quindi si tratta di contare quante sono queste scelte.

Osserviamo che ad ogni scelta posso far corrispondere in modo naturale una parola di 7 lettere nel modo seguente: per ogni $k = 1, \dots, 7$ la k -esima lettera della parola è **X** se il termine scelto dal k -esimo fattore è x , altrimenti è **Y**.

Ad esempio se viene scelto y dal secondo e dal quinto fattore di (2), mentre da tutti gli altri viene scelto x , la parola che rappresenta tale scelta è:

$$(3) \quad \mathbf{XYXXYXX}$$

Siccome i casi da contare sono tutti e soli quelli in cui viene presa 5 volte la x e 2 volte la y , le corrispondenti parole sono tutti e soli gli anagrammi della (3), che sono:

$$\frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21.$$

In conclusione, quando si sviluppa il prodotto (2) si ottengono 21 termini uguali a x^5y^2 , sommando i quali si ottiene $21x^5y^2$. Ciò significa che il coefficiente cercato è 21.

Ragionando in modo del tutto analogo si trova che nel caso generale, cioè nello sviluppo di $(x+y)^n$, il coefficiente del termine x^ky^{n-k} è uguale al numero di anagrammi della parola:

$$\underbrace{\mathbf{XX} \dots \mathbf{X}}_k \underbrace{\mathbf{YY} \dots \mathbf{Y}}_{n-k},$$

Testo Sinistro

che sono $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, cioè $\binom{n}{k}$.

11. Trovare il coefficiente di $x^3y^2z^4$ nello sviluppo di $(x+y+z)^9$.
In generale, nello sviluppo di $(x+y+z)^n$, trovare il coefficiente di $x^\alpha y^\beta z^\gamma$, con $\alpha+\beta+\gamma = n$.

Soluzione di 11. Ragionando come nella soluzione del problema 10, si trova che nello sviluppo di $(x+y+z)^9$, cioè effettuando il prodotto

$$\overbrace{(x+y+z) \cdot (x+y+z) \cdot \dots \cdot (x+y+z)}^{9 \text{ volte}},$$

il termine $x^3y^2z^4$ compare tante volte quanti sono gli anagrammi della parola

XXXYYZZZ,

che sono

$$\frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 = 1260.$$

Quindi $x^3y^2z^4$ compare nello sviluppo di $(x+y+z)^9$ con coefficiente 1260.

Più in generale, se consideriamo lo sviluppo di $(x+y+z)^n$ e ci chiediamo quale sia il coefficiente di $x^\alpha y^\beta z^\gamma$, con $\alpha+\beta+\gamma = n$, ragionando sempre allo stesso modo scopriamo che è uguale al numero di anagrammi della parola:

$$\overbrace{\text{XX} \dots \text{X}}^\alpha \overbrace{\text{YY} \dots \text{Y}}^\beta \overbrace{\text{ZZ} \dots \text{Z}}^\gamma,$$

che sono $\frac{n!}{\alpha! \cdot \beta! \cdot \gamma!}$.

Ovviamente il procedimento si può ulteriormente generalizzare alla potenza di un polinomio con più di 3 termini.

12. Quante sono le funzioni **strettamente crescenti** dall'insieme $A = \{1, 2, 3\}$ all'insieme $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$?
(Una funzione f da A a B è una "legge" che ad ogni elemento a dell'insieme A associa uno e un solo elemento dell'insieme B , che indichiamo con $f(a)$; f si dice strettamente crescente quando, comunque presi a_1 e a_2 in A , se $a_1 < a_2$ allora $f(a_1) < f(a_2)$)

Soluzione di 12. È possibile che a qualche studente non sia ancora familiare il concetto di funzione: siccome si tratta di una legge che ad ogni elemento di A associa uno e un solo elemento di B , uno dei modi di visualizzarla è quello di disegnare un insieme di frecce che vanno da A a B in modo che da ogni elemento di A parta una e una sola freccia che poi va a finire proprio nell'elemento di B che gli viene associato dalla funzione.

Ecco, nelle 3 figure che seguono, 3 esempi di funzioni:

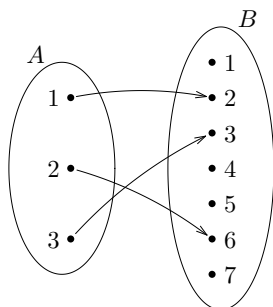


figura 3

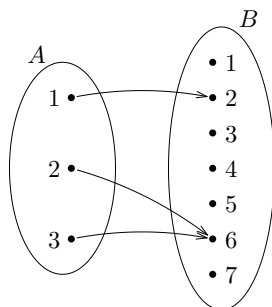


figura 4

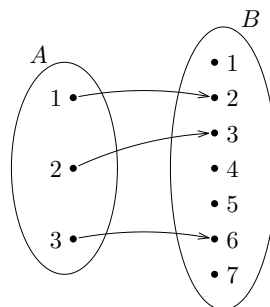


figura 5

Delle 3 funzioni considerate solo quella di figura 5 è strettamente crescente visto che $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ e $f(3) = 6$, per cui $f(1) < f(2) < f(3)$.

Al contrario quella di figura 3 non lo è perchè $f(2) > f(3)$ anche se $2 < 3$.

Nemmeno quella di figura 4 è strettamente crescente visto che $f(2) = f(3)$ anche se $2 < 3$.

Il nostro scopo è quello di contare quante sono le funzioni strettamente crescenti, cioè quelle del tipo rappresentato in figura 5.

L'osservazione cruciale (anche se ovvia) che ci permette di contarle è la seguente:

comunque scelti 3 elementi di B esiste una e una sola funzione strettamente crescente che manda l'insieme A in tali elementi

Ad esempio, se scegliamo in B gli elementi 2, 5 e 7 (vedi figura 6), l'unica funzione strettamente crescente che manda A in tali elementi è quella rappresentata in figura 7, mentre tutte le altre 5 funzioni che mandano A nei 3 elementi di B fissati sono simili a quella rappresentata nella figura 8, cioè le punte delle frecce non mantengono sempre lo stesso ordinamento delle code e quindi tali funzioni non sono strettamente crescenti.

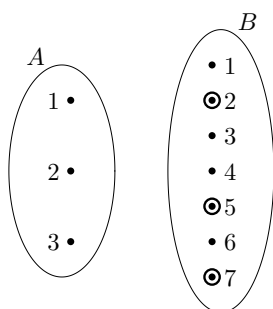


figura 6

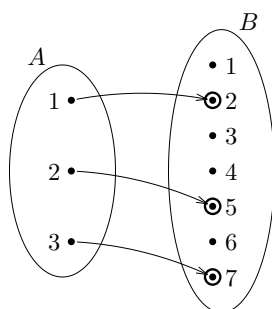


figura 7

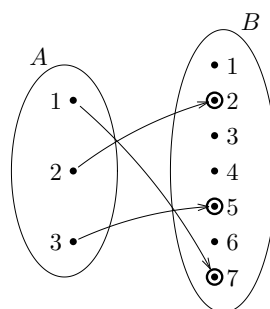


figura 8

L'osservazione appena fatta, combinata con quella (ancora più ovvia) che, se la funzione è strettamente crescente, i punti di B colpiti dalle frecce sono sempre 3, ci permette di concludere che le funzioni strettamente crescenti sono tante quante i modi di scegliere 3 elementi tra i 7 elementi di B.

Ma questi li sappiamo contare: sono $\binom{7}{3}$, cioè 35.

Quindi anche le funzioni strettamente crescenti da A a B sono 35.

Problemi proposti

[. . .]

44.

Quante sono le funzioni dall'insieme $A = \{1, 2, 3\}$ all'insieme $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$?

Quante di queste sono **debolmente crescenti**?

Quante invece sono **iniettive**?

(Una funzione f da A a B si dice debolmente crescente quando, comunque presi a_1 e a_2 in A , se $a_1 < a_2$ allora $f(a_1) \leq f(a_2)$; invece f si dice iniettiva se da $a_1 \neq a_2$ segue che $f(a_1) \neq f(a_2)$.)

[. . .]

83.

Quanti sono i numeri di 3 cifre tali che la cifra delle centinaia è strettamente maggiore della cifra delle decine e quella delle decine è strettamente maggiore di quella delle unità?

[. . .]

Capitolo III

Soluzioni dei problemi proposti

[. . .]

Soluzione di 44.

Le funzioni da A a B sono in tutto 343, quelle debolmente crescenti sono 84 e quelle iniettive sono 210.

Il fatto che tutte le funzioni siano 343 segue subito dal fatto che ciascuno dei tre elementi di A può essere mandato in B in 7 modi, quindi i 3 elementi complessivamente in $7 \cdot 7 \cdot 7$ modi, cioè in 343 modi.

Veniamo alle funzioni debolmente crescenti.

Una volta che, per ciascun elemento di B , si sia deciso quante frecce ci arrivano (ovviamente in modo che complessivamente le frecce siano 3), la funzione è univocamente determinata dal fatto che deve essere debolmente crescente.

Basta quindi determinare in quanti modi posso distribuire le 3 punte di freccia ai 7 elementi dell'insieme B , accettando anche che un elemento possa essere colpito da più di una freccia. Questo problema lo conosciamo già perché, nomi a parte, è identico a contare in quanti modi posso distribuire 3 caramelle a 7 bimbi, che sono:

$$\frac{(3+6)!}{3! \cdot 6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84.$$

Veniamo infine alle funzioni iniettive.

Una volta scelti i 3 oggetti di B da colpire con le 3 frecce, cosa che può essere fatta in $\binom{7}{3}$ modi, le 3 frecce possono distribuirsi su di essi in $3!$ modi diversi. Quindi le possibili configurazioni di frecce sono:

$$\binom{7}{3} \cdot 3! = \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot 3! = \frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$$

In alternativa si poteva notare che, se le 3 frecce devono colpire oggetti diversi, dopo aver scelto in 7 modi l'oggetto di B colpito dalla prima freccia, quello colpito dalla seconda può essere scelto in 6 modi e quello della terza in 5 modi. Quindi i modi di scegliere le 3 frecce sono in tutto $7 \cdot 6 \cdot 5$, cioè 210.

[. . .]

Soluzione di 83.

La risposta corretta è 120.

Ad ogni scelta di 3 numeri diversi nell'insieme $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ faccio corrispondere un numero di 3 cifre che ha come cifre i 3 numeri scelti, messi in ordine dal più grande al più piccolo.

In tal modo ottengo una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri che devo contare e l'insieme di tutti i modi di scegliere 3 elementi diversi da $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, che sappiamo essere $\binom{10}{3}$, cioè 120.

[. . .]