Analisi Matematica 1- Prova Simulata n. 3

Argomenti: derivazione e integrazione in 1 variabile, serie numeriche.

Titolo nota

www.problemisvolti.it

1) Sia $f(x) = \left(e^{-2x^2} - \cos 2x\right)\left(\sin(x^3) - (\sin x)^3\right)$.

$\boxed{T_{11}[f](x) = \frac{2}{3}x^9 - \frac{23}{30}x^{11}}$

a) Trovare il polinomio di Taylor di ordine 11 di $f(x)$ in $x_0 = 0$.

b) Usare il risultato del punto (a) per calcolare $f^{(11)}(0)$ $= -\frac{23}{30}\cdot 11!$

c) (FACOLTATIVO) Dire, motivando la risposta, quanto vale $f^{(200)}(0)$ $= 0$

PERCHÈ $f^{(200)}(x)$ È UNA FUNZIONE DISPARI

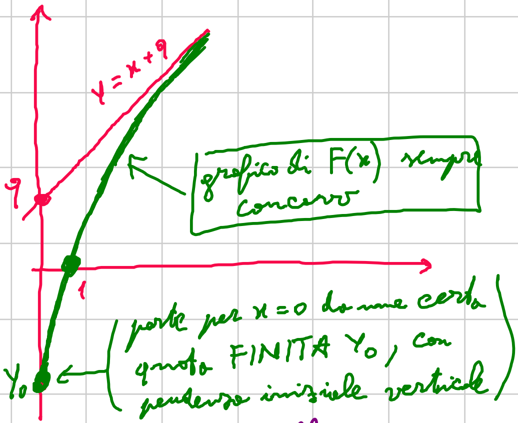
2) Dire, ricorrendo eventualmente ad uno studio di funzione, quante sono, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ le soluzioni reali dell'equazione:

$$3x^4 - 20x^3 + 36x^2 + 15 = \alpha$$

[NESSUNA SOL. PER $\alpha < 15$; 1 SOL. PER $\alpha = 15$; 2 SOL. PER $15 < \alpha < 42$ E $\alpha > 47$; 3 SOL. PER $\alpha = 42$ E $\alpha = 47$; 4 SOL. PER $42 < \alpha < 47$]

3) Studiare la funzione $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\pi}{2\arctan(t^2 + \sqrt{t})}\,dt$,

ovvero determinarne dominio, intersezione con gli assi, eventuali asintoti, monotonia, convessità e comportamento di $F'(x)$ al bordo del dominio.



4) Studiare, al variare del parametro $\alpha > 0$, il carattere della serie:

$$\sum_{n=[\alpha]+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \alpha \sin n}$$

(Ricordare che il simbolo $[\cdot]$ significa "parte intera di ...")

[CONVERGE PER OGNI VALORE DI α, MA ATTENZIONE A COME LO SI DIMOSTRA QUANDO $\alpha > 1$]

5) (FACOLTATIVO) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$. Mostrare che $f(x) = o(x)$ per $x \to +\infty$.

[ATTENZIONE: SEMBRA CHE SI POSSA FARE SUBITO APPLICANDO DE L'HOPITAL A $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, MA NON È COSÌ PERCHÈ NON SAPPIAMO SE $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ESISTE. MEGLIO DIMOSTRARE "A MANO" CHE $\forall \varepsilon > 0$, DEFINITIVAMENTE $|f(x)| \le \varepsilon |x|$ ...]

(Tempo: 2h e 30 min. – Punteggi dei problemi: $(6+2+?) + 8 + 8 + 8 + ?$)