

Secondo Esonero di Analisi Matematica I

A

A.A. 2015-2016
30 Gennaio 2016

1. Data la funzione

$$f(x) = \ln(1 - \sin^2 x) \cdot \sin(x^2) + x^4 + \frac{1}{6} \arctan(x^6).$$

- (a) Dire, al variare di $\alpha > 0$, quanto vale il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$.
- (b) Dire, motivando la risposta, quanto valgono $f^{(8)}(0)$ e $f^{(9)}(0)$.

2. Si consideri l'equazione

$$x^2(16 - x^2) = \arctan x$$

- (a) Fare uno studio dettagliato della funzione al primo membro.
- (b) Usare lo studio fatto al punto (a) per stabilire quante sono le soluzioni dell'equazione, motivando accuratamente ogni affermazione.
- (c) (Facoltativo) Separare le soluzioni, ovvero, per ogni soluzione dell'equazione, esibire un intervallo che contenga lei ma non le altre soluzioni.

3. Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right).$$

- (a) Calcolare l'integrale $\int_1^2 f(x) dx$.
- (b) Calcolare l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x) dx$

4. Studiare il grafico della funzione

$$F(x) = \int_0^x \cos \frac{\pi}{2+t^2} dt.$$

In particolare determinarne dominio ed eventuali asintoti e studiarne monotonia e convessità. Dire infine se ha qualche simmetria.

5. (Facoltativo) Di una funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ di classe C^2 sappiamo che esiste una retta che interseca il suo grafico in 3 punti distinti di ascisse x_1, x_2 e x_3 . Dimostrare che c'è almeno un punto in cui $f''(x)$ si annulla.

Tempo: 2 ore e 30 minuti

Punteggi: (6+2)+(4+4+?)+(4+4)+9+?

Cognome:..... Nome:..... Matr:.....

Dai il tuo consenso alla pubblicazione del tuo voto nella pagina web del docente? SI NO Firma:.....

Secondo Esonero di Analisi Matematica I

B

A.A. 2015-2016
30 Gennaio 2016

6. Data la funzione

$$f(x) = \ln(1 - \sin^2 x) \cdot \arctan(x^2) + x^4 + \frac{1}{6} \sin(x^6).$$

- (a) Dire, al variare di $\alpha > 0$, quanto vale il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$.
- (b) Dire, motivando la risposta, quanto valgono $f^{(8)}(0)$ e $f^{(9)}(0)$.

7. Si consideri l'equazione

$$x^2(4 - x) = 2 - \arctan x$$

- (a) Fare uno studio dettagliato della funzione al primo membro.
- (b) Usare lo studio fatto al punto (a) per stabilire quante sono le soluzioni dell'equazione, motivando accuratamente ogni affermazione.
- (c) (Facoltativo) Separare le soluzioni, ovvero, per ogni soluzione dell'equazione, esibire un intervallo che contenga lei ma non le altre soluzioni.

8. Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

- (a) Calcolare l'integrale $\int_1^2 f(x) dx$.
- (b) Calcolare l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x) dx$

9. Studiare il grafico della funzione

$$F(x) = \int_0^x \ln\left(e + \frac{1}{1+t^2}\right) dt.$$

In particolare determinarne dominio ed eventuali asintoti e studiarne monotonia e convessità. Dire infine se ha qualche simmetria.

10. (Facoltativo) Di una funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ di classe C^2 sappiamo che esiste una retta che interseca il suo grafico in 3 punti distinti di ascisse x_1, x_2 e x_3 . Dimostrare che c'è almeno un punto in cui $f''(x)$ si annulla.

Tempo: 2 ore e 30 minuti

Punteggi: (6+2)+(4+4+?)+(4+4)+9+?

Cognome:..... Nome:..... Matr:.....

Dai il tuo consenso alla pubblicazione del tuo voto nella pagina web del docente? SI NO Firma:.....

Secondo Esonero di Analisi Matematica I

C

A.A. 2015-2016
30 Gennaio 2016

11. Data la funzione

$$f(x) = \ln(\cos 2x) \cdot \arctan(x^2) + 2x^4 + \frac{4}{3} \sin(x^6).$$

- (a) Dire, al variare di $\alpha > 0$, quanto vale il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$.
 (b) Dire, motivando la risposta, quanto valgono $f^{(8)}(0)$ e $f^{(9)}(0)$.

12. Si consideri l'equazione

$$|x^3 + 1| = 1 + \arctan x$$

- (a) Fare uno studio dettagliato della funzione al primo membro.
 (b) Usare lo studio fatto al punto (a) per stabilire quante sono le soluzioni dell'equazione, motivando accuratamente ogni affermazione.
 (c) (Facoltativo) Separare le soluzioni, ovvero, per ogni soluzione dell'equazione, esibire un intervallo che contenga lei ma non le altre soluzioni.

13. Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

- (a) Calcolare l'integrale $\int_2^3 f(x) dx$.
 (b) Calcolare l'integrale improprio $\int_1^3 f(x) dx$

14. Studiare il grafico della funzione

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{1 + e^{-t^2}} dt.$$

In particolare determinarne dominio ed eventuali asintoti e studiarne monotonia e convessità. Dire infine se ha qualche simmetria.

15. (Facoltativo) Di una funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ di classe C^2 sappiamo che esiste una retta che interseca il suo grafico in 3 punti distinti di ascisse x_1, x_2 e x_3 . Dimostrare che c'è almeno un punto in cui $f''(x)$ si annulla.

Tempo: 2 ore e 30 minuti

Punteggi: (6+2)+(4+4+?)+(4+4)+9+?

Cognome:..... Nome:..... Matr:.....

Dai il tuo consenso alla pubblicazione del tuo voto nella pagina web del docente? SI NO Firma:.....

Secondo Esonero di Analisi Matematica I

D

A.A. 2015-2016
30 Gennaio 2016

16. Data la funzione

$$f(x) = \ln(\cos 2x) \cdot \sin(x^2) + 2x^4 + \frac{4}{3} \arctan(x^6).$$

- (a) Dire, al variare di $\alpha > 0$, quanto vale il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$.
 (b) Dire, motivando la risposta, quanto valgono $f^{(8)}(0)$ e $f^{(9)}(0)$.

17. Si consideri l'equazione

$$|x^5 - 1| = 1 - \arctan x$$

- (a) Fare uno studio dettagliato della funzione al primo membro.
 (b) Usare lo studio fatto al punto (a) per stabilire quante sono le soluzioni dell'equazione, motivando accuratamente ogni affermazione.
 (c) (Facoltativo) Separare le soluzioni, ovvero, per ogni soluzione dell'equazione, esibire un intervallo che contenga lei ma non le altre soluzioni.

18. Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \ln \sqrt{1 + \frac{1}{x}}.$$

- (a) Calcolare l'integrale $\int_1^2 f(x) dx$.
 (b) Calcolare l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x) dx$

19. Studiare il grafico della funzione

$$F(x) = \int_0^x e^{\frac{1}{1+t^2}} dt.$$

In particolare determinarne dominio ed eventuali asintoti e studiarne monotonia e convessità. Dire infine se ha qualche simmetria.

20. (Facoltativo) Di una funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ di classe C^2 sappiamo che esiste una retta che interseca il suo grafico in 3 punti distinti di ascisse x_1, x_2 e x_3 . Dimostrare che c'è almeno un punto in cui $f''(x)$ si annulla.

Tempo: 2 ore e 30 minuti

Punteggi: (6+2)+(4+4+?)+(4+4)+9+?

Cognome:..... Nome:..... Matr:.....

Dai il tuo consenso alla pubblicazione del tuo voto nella pagina web del docente? SI NO Firma:.....