Secondo Esonero di Analisi Matematica I

A

A.A. 2014-2015
2 Febbraio 2015

1. Calcolare il limite: $\lim_{x\to 0} \frac{\left(\ln(1+x^2)+\ln(1-x^2)\right)\left(x-\frac{1}{3}\arctan 3x\right)+3x^7}{x^9}$ $\boxed{= \frac{81}{5}}$

2. Dire, motivando la risposta con uno studio di funzione, quante sono le soluzioni reali dell'equazione:

$$x^{99}+1=20x.$$

3 SOLUZIONI x_1 x_2 e x_3 con $-2<x_1<-1$ $\quad 0<x_2<1$ e $1<x_3<2$

3. Sia dato l'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \frac{3+(\alpha-2)\cos x}{x\ln^\alpha x}\,dx$, calcolarlo per $\alpha=2$ poi studiarne, al variare di $\alpha>0$, prima la convergenza assoluta, poi quella semplice.

PER $\alpha=2$ VALE $\frac{3}{\ln 2}$, PER $\alpha\leq 1$ DIVERGE A $+\infty$, PER $\alpha>1$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE

4. Data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, studiarne convergenza semplice e assoluta per $\alpha=2$ e per $\alpha=1$.

PER $\alpha=2$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE
PER $\alpha=1$ CONVERGE SEMPLICEMENTE MA NON ASSOLUTAMENTE

5. Sia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ derivabile 2 volte e tale che, per ogni $x\in\mathbf{R}$ si abbia $|f''(x)|\leq 4$. Supponiamo inoltre che $f(x)$ sia identicamente nulla per $x\leq 0$.
Mostrare che $|f(2)|\leq 8$.

SUGGERIMENTO: MOSTRARE CHE

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=0 \\ (-2x^2)''\leq f''(x)\leq (2x^2)'' \text{ per } x\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -2x^2\leq f(x)\leq 2x^2 \\ \text{per } x\geq 0 \end{cases}$$

Tempo: 2 ore e 30 minuti
Punteggi: 8+8+8+8+?

Secondo Esonero di Analisi Matematica I

B

A.A. 2014-2015
2 Febbraio 2015

6. Calcolare il limite: $\lim_{x\to 0} \frac{\left(\ln^2(1+x) - \ln(1+x^2)\right)(x - \arctan x) + \frac{1}{3}x^6}{x^7}$ $\boxed{= \frac{17}{36}}$

7. Dire, motivando la risposta con uno studio di funzione, quante sono le soluzioni reali dell'equazione:

$$x^{99} - 1 = \arctan x.$$

1 SOLUZIONE x_1 CON $1 < x_1 < 2$

8. Sia dato l'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \frac{5 + (\alpha - 4)\cos x}{x \ln^\alpha x}\,dx$, calcolarlo per $\alpha = 4$ poi studiarne, al variare di $\alpha > 0$, prima la convergenza assoluta, poi quella semplice.

PER $\alpha = 4$ VALE $\frac{5}{3(\ln 2)^3}$. PER $\alpha \leq 1$ DIVERGE.
PER $\alpha > 1$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE

9. Data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)n^\alpha}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, studiarne convergenza semplice e assoluta per $\alpha = 1$ e per $\alpha = 0$.

PER $\alpha = 1$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE
PER $\alpha = 0$ CONVERGE SEMPLICEMENTE MA NON ASSOLUTAMENTE

10. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabile 2 volte e tale che, per ogni $x \in \mathbf{R}$ si abbia $|f''(x)| \leq 4$. Supponiamo inoltre che $f(x)$ sia identicamente nulla per $x \leq 0$.
Mostrare che $|f(2)| \leq 8$.

(IDENTICO AL PROB. 5 DEL COMPITO A)

Tempo: 2 ore e 30 minuti
Punteggi: 8+8+8+8+?

Secondo Esonero di Analisi Matematica I

C

A.A. 2014-2015
2 Febbraio 2015

11. Calcolare il limite: $\lim_{x\to 0} \frac{(e^{3x} - e^{-3x} - 2\sin 3x)(\arctan x - \sin x) + 3x^6}{x^8}$ $\boxed{= \frac{69}{20}}$

12. Dire, motivando la risposta con uno studio di funzione, quante sono le soluzioni reali dell'equazione:

$$\sqrt[4]{x^4+1} = e^x.$$

SOLO LA SOLUZIONE $x_1 = 0$

13. Sia dato l'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \frac{5 + (\alpha - 4)\sin x}{\sqrt[4]{x^\alpha}\ln^2 x}\,dx$, calcolarlo per $\alpha = 4$ poi studiarne, al variare di $\alpha > 0$, prima la convergenza assoluta, poi quella semplice.

PER $\alpha = 4$ VALE $\frac{5}{\ln 2}$. PER $\alpha < 4$ DIVERGE.
PER $\alpha \geq 4$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE

14. Data la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^\alpha n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, studiarne convergenza semplice e assoluta per $\alpha = 2$ e per $\alpha = 1$.

PER $\alpha = 2$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE
PER $\alpha = 1$ CONVERGE SEMPLICEMENTE MA NON ASSOLUTAMENTE.

15. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabile 2 volte e tale che, per ogni $x \in \mathbf{R}$ si abbia $|f''(x)| \leq 4$. Supponiamo inoltre che $f(x)$ sia identicamente nulla per $x \leq 0$.
Mostrare che $|f(2)| \leq 8$.

(IDENTICO AL PROB. 5 DEL COMPITO A)

Tempo: 2 ore e 30 minuti
Punteggi: 8+8+8+8+?

Secondo Esonero di Analisi Matematica I

D

A.A. 2014-2015
2 Febbraio 2015

16. Calcolare il limite: $\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1-x^2}-\cos x\right)(\sin 4x - 2\sin 2x) - \frac{4}{3}x^7}{x^9}$ $\boxed{= -\frac{38}{45}}$

17. Dire, motivando la risposta con uno studio di funzione, quante sono le soluzioni reali dell'equazione:

$$\sqrt[4]{x^4+1} = e^{-x}.$$

SOLO LA SOLUZIONE $x_1 = 0$

18. Sia dato l'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \frac{3+(\alpha-2)\sin x}{\sqrt{x^\alpha}\ln^2 x}\,dx$, calcolarlo per $\alpha = 2$ poi studiarne, al variare di $\alpha > 0$, prima la convergenza assoluta, poi quella semplice.

PER $\alpha = 2$ VALE $\frac{3}{\ln 2}$ - PER $\alpha < 2$ DIVERGE.
PER $\alpha \geq 2$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE

19. Data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, studiarne convergenza semplice e assoluta per $\alpha = 2$ e per $\alpha = \frac{1}{2}$.

PER $\alpha = 2$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE
PER $\alpha = 1$ CONVERGE SEMPLICEMENTE MA NON ASSOLUTAMENTE

20. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabile 2 volte e tale che, per ogni $x \in \mathbf{R}$ si abbia $|f''(x)| \leq 4$. Supponiamo inoltre che $f(x)$ sia identicamente nulla per $x \leq 0$.
Mostrare che $|f(2)| \leq 8$.

(IDENTICO AL PROB. 5 DEL COMPITO A)

Tempo: 2 ore e 30 minuti
Punteggi: 8+8+8+8+?